Beiträge zur funktionalen Separabilität bei Nutzenfunktionen

Hans-Werner Gottinger

1968

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545804_0113

Beiträge zur funktionalen Separabilität bei Nutzenfunktionen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Staatswirtschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von

Hans-Werner Gottinger

1968

Referent: Herr Prof. Dr. E. Fels
Korreferent: Frau Prof. Dr. U. Gruber

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Dezember 1968

Sonderdruck aus:

ZEITSCHRIFT FÜR DIE GESAMTE STAATSWISSENSCHAFT

Herausgegeben von

FRANZ BÖHM, WALTHER HOFFMANN,

HEINZ SAUERMANN

125. Band / 4. Heft

Oktober 1969

1969

J.C.B. MOHR ‹PAUL SIEBECK› TÜBINGEN

Dieser Sonderdruck ist im Buchhandel nicht erhältlich

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Beiträge zur funktionalen Separabilität bei Nutzenfunktionen

(Teil I)

von

HANS-WERNER GOTTINGER

München

Vorbemerkung

Diese Arbeit benutzt eine Reihe mengentheoretischer und topologischer Begriffe. Einige dieser Begriffe werden hier erklärt und – wenn sie besonders wichtig sind – als Definitionen gebracht. Allgemeine Begriffe der Mengenlehre und Topologie werden vollständig in den einschlägigen Lehrbüchern behandelt und erklärt. Dafür verweisen wir namentlich auf *Kuratowski* [21], *Franz* [8] und *Schubert* [32].

Inhaltsverzeichnis

Teil I

I. Fundamente einer Theorie der funktionalen Separabilität 407
1. Die Einführung der Axiome 407
2. Einige Ergebnisse über geordnete topologische (Präferenz-) Räume 411

II. Die Theorie der funktionalen Separabilität 419
1. Definitionen und Eigenschaften 419
2. Funktionale Separabilität und Zeitpräferenzen 430

Teil II*

III. Funktionale Separabilität und Mikronachfragetheorie . . . . . .
1. Einige Sätze über Mikroallokation . . . . . .
2. Der Budgetierungsprozeß und die Allokation der Konsumausgaben . . . . . .

IV. Funktionale Separabilität und Konsumtechnologie . . . . . .
1. Produktionstheoretische Beziehungen in der Nutzentheorie . .
2. Die linearökonomischen (aktivitätsanalytischen) Ansätze von *Morishima* und *Lancaster* . . . . . .
3. Eine vergleichende Würdigung . . . . . .

* Erscheint in Heft 4, Oktober 1969.

I. Fundamente einer Theorie der funktionalen Separabilität

Zunächst führen wir nach einigen wirtschaftstheoretischen Vorbereitungen die Axiome für einen geordneten topologischen Raum X ein.

Im zweiten Abschnitt bestimmen wir schrittweise eine geeignete topologische Struktur auf X. Für einen solchen Raum gelingt der Nachweis der Existenz einer entsprechenden Nutzenfunktion. Durch die Einführung einer *Hausdorff*schen Topologie gehen wir von allgemeineren Voraussetzungen aus, als sie für die metrische Topologie auf X gelten (*Debreu* [4], [5]. Einige mathematische Postulate und Eigenschaften werden wirtschaftstheoretisch motiviert.

1. Die Einführung der Axiome

Die traditionelle Nutzentheorie hat entweder die empirisch gewonnene Einsicht außer Betracht gelassen, daß die Güter untereinander einen unterschiedlichen Verwandtschaftsgrad aufweisen (z.B. sind Butter und Margarine enger »verwandt« als Butter und Wintersocken), oder aber sie hat – empirisch ebensowenig vertretbar – jede Verwandtschaftsbeziehung der Güter untereinander strikt geleugnet. Beide Fälle lassen sich aus den verschiedenen Formen der klassischen Nutzenfunktionen ersehen [13, S. 256].

Im ersten Fall führt es dazu, daß jede auf X definierte Funktion als Funktion der Gütervariablen $x_1, \ldots, x_n$ zu verstehen ist, im anderen Fall zur Konstruktion einer additiven Funktion, wo diesen Variablen Nutzenindizes zugeordnet sind, die aufsummiert gleich dem Gesamtnutzen sind.

Beide Fälle lassen wirtschaftliche Verhaltensplausibilität vermissen. Die zugrunde liegenden Funktionstypen werden auch ökonometrischen Anforderungen nicht gerecht und erscheinen in der ursprünglichen Form (d.h. ohne Aggregation) einer numerischen Behandlung kaum zugänglich.

Es mußte deshalb naheliegen, die unübersehbare Zahl der Güter mittels Aggregation auf eine empirisch vertretbare Zahl zu beschränken. Dies kann über die Konstruktion geeigneter Gütergruppen geschehen. (Der Aggregationsprozeß kann jedoch nicht willkürlich erfolgen, sondern muß gewissen Anforderungen genügen, die wir in Kapitel 3 angeben werden.) Gehen wir andererseits von der Menge X aus und untersuchen wir ihre Struktur in bezug auf die Bildung von Gütergruppen, so können wir von einem Separabilitätsprozeß sprechen. Aggregation in diesem Sinn und Separabilität sind also verschiedene Ausdrücke für das gleiche Verfahren aus entgegengesetzter Sicht. Eine Menge, die eine Zerlegung (Partitien) in (disjunkte) Teilmengen zuläßt, heißt dann (unter gewissen Bedingungen) *separabel*. Neu – in diesem Zusammenhang – ist der hier eingeführte Gedanke, Präferenzordnungen auf diesen Teilmengen und der Obermenge festzulegen. Die Präferenzordnungen dienen dazu, sowohl Ordnungsbeziehungen zwischen verschiedenen Gütergruppen (die Inter-Ordnungsbeziehungen) zu bestimmen als auch Ordnungsbeziehungen innerhalb der

einzelnen Gütergruppen (die Intra-Ordnungsbeziehungen) zu berücksichtigen.

Ein geeigneter Weg ist, X als topologischen Raum vorauszusetzen. Dabei folgen wir *Debreu* [4], [5] und anderen insoweit, als auch wir geordnete topologische (Präferenz-)Räume betrachten. Während *Debreu* jedoch mit einer metrischen Topologie auf X arbeitet, wird unser Ansatz allgemeiner sein, da wir einen geordneten topologischen Raum als *Hausdorff*schen Raum auffassen wollen. Einen *Hausdorff*schen Raum kann man durch Verwendung des Umgebungsbegriffes charakterisieren. Es gelten die *Hausdorff*schen Umgebungsaxiome [15, S. 213];

(A) Jedem Punkt x ist mindestens eine Umgebung $U(x)$ zugeordnet.

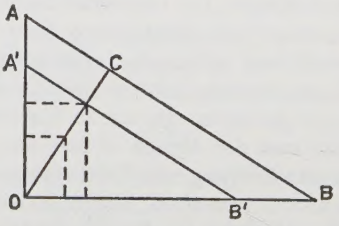
(B) Wenn $U(x)$ und $V(x)$ zwei Umgebungen des Punktes x sind, so gibt es eine Umgebung $W(x) = \{x : x \in U(x) \text{ und } x \in V(x)\}$.

(C) Wenn ein Punkt $y \in U(x)$ ist, dann gibt es eine Umgebung $U(y)$, so daß $U(y) \subseteq U(x)$.

(D) Für $x \neq y$ gibt es Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$, so daß $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Ein topologischer Raum, der die ersten drei *Hausdorff*schen Umgebungsaxiome erfüllt, heißt ein Umgebungsraum. Ein Umgebungsraum, der zusätzlich noch dem *Hausdorff*schen Trennungsaxiom (D) genügt, heißt ein *Hausdorff*scher Raum.

Zusätzlich treffen wir schwächere Annahmen bezüglich der Ordnungsstruktur dieses Raumes, indem wir nur teilweise geordnete Präferenzrelationen fordern. Wir verlangen also keine Vergleichbarkeit zwischen bestimmten in X enthaltenen Punkten. Vergleichbarkeit erfordert, daß ein Individuum immer eine Präferenzentscheidung zwischen zwei Alternativen treffen kann und will. Eine instruktive graphische Darstellung, die die Konsequenz der Vergleichbarkeit und Nicht-Vergleichbarkeit zeigt, übernehmen wir von *Aumann* [2, S. 221].



Das Individuum entscheidet sich für alle Punkte mit größeren Koordinaten (z.B. für Punkte auf der Linie OC), es ist aber nicht fähig oder willens, sich für irgendeinen Punkt zu entscheiden, der auf der Substitutionslinie AB liegt. Tatsächlich sind in einer modernen Konsumgesellschaft die Präferenzsituationen oft so kompliziert, daß das Postulieren der Vergleichbarkeit (auf X) eine unangemessene empirische Einschrän-

kung ist. Mögliche Intransitivitäten bei der Präferenzentscheidung lassen dann auf Nicht-Vergleichbarkeit der Alternativen schließen (*Aumann* [1, S. 447]), so daß man mit dem Verzicht auf Vergleichbarkeit zirkuläre Präferenzen vermeiden kann. Es läßt sich bereits deutlich erkennen, daß eine moderne Richtung in der Nutzentheorie darauf hinausläuft, die vollständige Ordnung durch die schwächere Teilordnung zu ersetzen. Ansätze finden sich bei *Aumann* [1] und *Kannai* [18]. Das folgende Postulat (1) ist von *Debreu* [5, 4.3.] auf einem mit der euklidischen Metrik versehenen n-dimensionalen Raum (dem n-dimensionalen euklidischen Raum R^n) erklärt worden. Es läßt sich auch auf *Hausdorff*sche Räume übertragen, wenn wir auch deutlich hinzufügen müssen, daß *jede* Punktfolge in X einen Grenzwert in X besitzen muß. In diesem Fall sagt man auch: X ist *vollständig* (*Franz* [8, § 21]). (Dieser Begriff darf nicht mit dem einer vollständigen Ordnung verwechselt werden.) Vollständigkeit ist für topologische Räume eine allgemeine Forderung, die durch die Konstruktion einer *verallgemeinerten Punktfolge* in X erfüllt ist (White [38, S. 80, 81]).

(1) X ist abgeschlossen. Wenn x_k eine für k beliebige Folge von Konsumpunkten in X bezeichnet, die alle in X möglich sind und wenn x_k einen Grenzwert in x_o besitzt, so daß $\lim_{k \to \infty} x_k = x_o$, dann ist auch x_o in X möglich. Dieses Postulat ist notwendig für eine stetige, auf X definierte reelle Funktion.

(2) X ist $\succsim$-teilweise geordnet, d.h. für beliebige Punkte $x, x', x'' \in X$ gilt: 1. $x \succsim x$ (Reflexivität). 2. Aus $x \succsim x'$ und $x' \succsim x$ folgt $x \sim x'$ (Antisymmetrie). 3. Aus $x \succsim x'$ und $x' \succsim x''$ folgt $x \succsim x''$ (Transitivität).

Fragen wir nun nach der inhaltlichen Berechtigung der durch die Teilordnung festgelegten Präferenzordnung. Reflexivität ist das schwächste Axiom. Es wird wohl bei keiner Präferenzentscheidung verletzt. Stärkere Voraussetzungen sind mit der Transitivität verbunden. Doch auch dieses Axiom dürfte bei Präferenzentscheidungen als vernünftige Annäherung an die Wirklichkeit gelten (*Pearce* [29, S. 21]). Intransitivität (Zirkularität von Präferenzen) scheint besonders in solchen Fällen aufzutreten, wo Präferenzentscheidungen mehr zufälliger Natur sind und auf einer gewissen Indeterminiertheit der Präferenzvorstellungen beruhen. Weit problematischer ist die Geltung intertemporaler Transitivität. Denn wenn sich ein Individuum in einem bestimmten Zeitpunkt transitiv verhält, dann ist es keineswegs klar, daß es sich auch im Zeitablauf so verhält. Die Transitivitätsrelation ist also nicht unabhängig von der zeitlichen Veränderung der Präferenzstruktur, die z.B. durch Geschmacksverschiebungen entstehen kann. Antisymmetrie bedeutet eine logische Straffung der Präferenzstruktur und dürfte so kaum umstritten sein. Wenn man die Transitivität als empirisch gehaltvolle Hypothese anerkennt, kann man auch Antisymmetrie vertreten, da Antisymmetrie ohne Transitivität nicht begründet werden kann. (Man geht von der Antisymmetrie aus: Aus $a \succsim c$ und $c \succsim a$ folgt $a \sim c$. Dies benutzt man als Ergebnis und bildet die Transitivitätsrelationen: 1. Aus $a \succsim b$ und $b \succsim c$ folgt $a \succsim c$, 2. aus $c \succsim b$ und $b \succsim a$ folgt $c \succsim a$. Bildet man aus diesen beiden Relationen eine dritte Transitivitätsrelation – was ja zulässig ist –, so gelangt man

geradewegs zur Antisymmetrie, wovon man ausgegangen ist.) Im strengen Sinn ist Antisymmetrie als Axiom *nicht* unabhängig, was *Debreu* [4, S. 160] implizit behauptet. Offensichtlich behauptet *Debreu* [4, S. 160] sogar, daß Antisymmetrie aus der Vergleichbarkeit und Transitivität abgeleitet werden kann. Einen Beweis dafür gibt er allerdings nicht.

Was die formale Berechtigung der Transitivität angeht, so ist dieses Axiom unvermeidlich, wenn die Existenz einer reellen Nutzenfunktion nachgewiesen werden soll. (Die Notwendigkeit, Transitivität zu fordern, folgt daraus, daß die Menge der reellen Zahlen transitiv geordnet ist.) Tatsächlich ist dann die schwächste Präferenzordnung, die nur Reflexivität und Transitivität voraussetzt, eine Quasiordnung. Wie sich im nächsten Abschnitt herausstellen wird, ist dies die Mindestvoraussetzung, die man für eine Präferenzordnung zu treffen hat, um die Existenz einer daraus ableitbaren, reellen Nutzenfunktion zu beweisen. Allerdings wird sich zeigen, daß es in einem *Hausdorff*schen Raum nicht sehr darauf ankommt, verschiedene Ordnungsrelationen der Reihe nach zu behandeln. Als nächste Postulate führen wir noch an:

(3) Die Präferenz-(Indifferenz-)Relation $\succsim$ ist konvex auf X (Konvexität der Ordnung). Aus $x \succsim x'$ folgt für $0 < t < 1$ die Relation $tx + (1-t)\,x' \succsim x'$ (schwache Konvexität nach *Debreu* [5, 4.7 (a)]). Das heißt, wenn x für den Konsumenten mindestens so erwünscht ist wie x', so ist auch jeder gewogene Durchschnitt von x und x' mindestens so erwünscht wie x'.

(4) Die Präferenz-(Indifferenz-)Relation $\succsim$ ist abgeschlossen auf X (Abgeschlossenheit der Ordnung). Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_o$ und $x_k \succsim x$ (für alle k), dann ist auch $x_o \succsim x'$. Ebenso: Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_o$ und $x_k \precsim x'$ (für alle k), dann ist $x_o \precsim x'$.

Schließlich postulieren und erklären wir noch:

(5) X ist kompakt.

Es gibt verschiedene Kompaktheitsbegriffe. Wir stützen uns auf einen Begriff, der zwar weniger anschaulich ist, sich aber für allgemeine topologische Räume, namentlich für *Hausdorff*sche Räume eignet (*Franz* [8, § 16]).

Eine Klasse $\mathfrak{I}$ von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X, wenn jeder Punkt von X zu einer Menge $I \in \mathfrak{I}$ gehört. Gilt $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{I}$ und ist $\mathfrak{K}$ auch eine Überdeckung von X, dann heißt $\mathfrak{K}$ Teilüberdeckung. Zunächst gilt folgende Eigenschaft für einen kompakten Raum:

1. Ein topologischer Raum ist kompakt, wenn jede offene Überdeckung $\mathfrak{I}$ von X eine endliche offene Teilüberdeckung $\mathfrak{K}$ enthält.

Für abgeschlossene Mengen kann man diese Eigenschaft so formulieren:

2. X ist kompakt, wenn jede Klasse $\mathfrak{I}$ von abgeschlossenen Teilmengen $I \in \mathfrak{I}$ mit leerem $\bigcap\limits_{I\,\varepsilon\,\mathfrak{I}} I$ stets endlich viele Teilmengen enthält, die ebenfalls einen leeren Durchschnitt haben.

Danach besitzt jede endliche Menge mit einer *Hausdorff*schen Topologie und jede Menge, die aus einer konvergenten Punktfolge und deren Grenzwert besteht, Kompaktheitseigenschaften. Der letzte Fall trifft für metrische Räume zu. Wenn X kompakt ist, ist X auch abgeschlossen. (5) stellt also eine stärkere Einschränkung als (1) dar. Da wir jedoch zunächst von dem schwächeren Postulat (1) ausgehen werden, um eine geeignete topologische Struktur auf X zu erklären, bleibt es berechtigt.

Ist X als Teilmenge von R^n beschränkt und abgeschlossen, dann ist X auch kompakt. (Das gilt nur für Teilmengen in euklidischen Räumen, aber nicht allgemein in metrischen Räumen.) $X \subseteq R^n$ ist beschränkt, wenn es Punkte $\underline{x}, \bar{x} \in R^n$ gibt, so daß $\underline{x} \leq x$ und $\bar{x} \geq x$ für alle $x \in X$. Es gibt kein $x \in X$, so daß $x < \underline{x}$ und $x > \bar{x}$.

(5) ist wirtschaftstheoretisch schwierig zu interpretieren. In der metrischen Topologie von R^n, wo Kompaktheit des Raumes mit seiner Abgeschlossenheit und Beschränktheit zusammenfällt, dürfen die beiden letztgenannten Eigenschaften als wirtschaftstheoretisch vertretbare Annahmen gelten, die man für einen geordneten topologischen (Präferenz-)Raum treffen kann.

Abgeschlossenheit bedeutet, daß es zu jeder beliebigen Folge von Konsumpunkten, die alle wählbar sind, jeweils immer einen Grenzkonsumpunkt dieser Folge gibt, der auch wählbar ist.

Beschränktheit läßt sich so interpretieren, daß es zumindest für den Konsumenten einen Konsumpunkt in X gibt, der sein physiologisches Existenzminimum sichert und zumindest einen anderen Konsumpunkt, der ein Sättigungspunkt ist. Unterstellt man einen begrenzten Konsumplanungshorizont, so erscheint die Annahme eines Sättigungspunktes wirtschaftstheoretisch plausibel.

Der Anschauung nach läßt sich hier der Begriff der Kompaktheit am besten durch den der Abgeschlossenheit und Beschränktheit verdeutlichen. In allgemeinen Fällen versagt jedoch eine Substitution dieser Begriffe.

2. *Einige Ergebnisse über geordnete topologische (Präferenz-)Räume*

Definition 1: Ein Punkt $x \in X$ heißt *Berührungspunkt* einer Teilmenge $I \subseteq X$, wenn in jeder Umgebung $U(x)$ Punkte von I liegen. Die Menge aller Berührungspunkte heißt die *Hülle* von I. Sie wird mit $\hat{I}$ bezeichnet. Dann gibt es für jede Umgebung $U(x)$ einen Punkt $x \in \hat{I}$ dann und nur dann, wenn $U(x) \cap I \neq \varnothing$ ist.

Enthält die Menge I alle Berührungspunkte, dann ist I *abgeschlossen*, d. h. gleich ihrer Hülle $\hat{I}$.

Zunächst benutzen wir nur Axiom (1) und haben als Grundlage für die weiteren Überlegungen

Satz 1: X ist ein topologischer Raum, wenn für jede beliebige Teilmenge I von X eine Hülle $\hat{I}$ existiert. Dann sind A und B zwei Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$; (b) $A \subset \widehat{A}$, $B \subset \widehat{B}$; (c) $\widehat{\varnothing} = \varnothing$; (d) $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$, $\widehat{\widehat{B}} = \widehat{B}$.

Sind diese Eigenschaften erfüllt, dann ist auch X für alle in X enthaltenen abgeschlossenen Teilmengen abgeschlossen.

Ein ausführlicher Beweis dieses Satzes findet sich bei *Kuratowski* [21, Kap. 10, § 5). *Kuratowski* weist diese Eigenschaften für metrische Räume nach, doch können sie auch zur Charakterisierung von allgemeinen topologischen Räumen herangezogen werden. Diese Räume werden dann durch das folgende Prinzip erklärt (*Franz* [8, S. 22]): 1. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen von X ist abgeschlossen. X ist abgeschlossen. 2. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen von X ist abgeschlossen. $\varnothing$ ist abgeschlossen. Der in Satz 1 eingeführte topologische Raum X stützt sich ausschließlich auf die Abgeschlossenheit seiner Teilmengen. Ist in diesem Raum die Hülle von X so erklärt, daß es für jede Umgebung $U(x)$ dann und nur dann einen Punkt $x \in \widehat{X}$ gibt, wenn $U(x) \cap X \neq \varnothing$ ist, dann weist auch ein *Hausdorff*scher Raum die in Satz 1 genannten Eigenschaften auf [21, S. 129, Exc. 11]. Mit dieser recht allgemeinen Charakterisierung eines topologischen Raums, die noch keine spezifische Ordnungsstruktur einbezieht, werden wir uns nicht zufrieden geben. Um eine Ordnungsstruktur in X einzuführen, benötigen wir eine Ordnungstopologie.

Definition 2: Eine Ordnungstopologie ist für X gegeben, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) X besitzt eine topologische Struktur im Sinne von Satz 1.

(b) X ist mit einer Ordnungsstruktur $\succsim$ versehen.

Je nachdem, ob $\succsim$ eine Quasi-, Teil- oder vollständige Ordnung festlegt, heißt X ein quasigeordneter, teilweise geordneter oder vollständig geordneter topologischer Raum.

Den Gedanken, daß geordnete Mengen »nach demselben Formalismus« behandelt werden können wie Punktmengen, hat bereits *Hausdorff* [15, S. 214] in seinem klassischen Werk über Mengenlehre ausgesprochen. Das ist so zu verstehen, daß topologische Räume durch Verwendung des (von *Hausdorff* geschaffenen) Umgebungsbegriffes allgemein charakterisiert werden können. Ebenso kann dieser Umgebungsbegriff – wie wir noch sehen werden – zur Definition jeder geordneten (offenen oder abgeschlossenen) Menge herangezogen werden. Deshalb kann er erfolgreich zur Charakterisierung eines geordneten topologischen Raums dienen. Die weiteren Überlegungen stützen sich auf Axiom (4). Der folgende Satz folgt *Eilenberg* [7, 1.4]:

Satz 2: Jeder $\succsim$-geordnete Raum X ist ein *Hausdorff*scher Raum (in seiner Ordnungstopologie).

(Um Verwirrung oder Verwechslung zu vermeiden, werden, wenn nötig, in einigen Fällen die Umgebungen mit Indizes versehen.)

Es sei $x \succsim y$ für einige $x, y \in X$ (bzw. $y \succsim x$ für einige $y, x \in X$) eine Präferenzordnung auf X. Zunächst nehmen wir an, X sei *zusammenhängend*. Die Menge X heißt zusammenhängend, wenn sie nicht zerlegbar ist in zwei nichtleere (offene oder abgeschlossene) disjunkte Teilmengen, deren Vereinigung die Menge selbst ist.

Die Umgebungen $U_1(x) = \{y : y \in X \text{ und } x \succsim y\}$ und $V_1(x) = \{y : y \in X \text{ und } y \succsim x\}$ sind abgeschlossen in X. (Entsprechendes gilt für die Umgebungen $U_1(y) = \{x : x \in X \text{ und } y \succsim x\}$ und $V_1(y) = \{x : x \in X \text{ und } x \succsim y\}$.) Es ist $U_1(x) \cup V_1(x) = X$ und $U_1(x) \cap V_1(x) \neq \varnothing$, d.h. es gibt ein gemeinsames Element $x \in U_1(x) \cap V_1(x)$.

Angenommen es gebe Punkte $z \in X$ derart, daß $x \succsim z \succsim y$ (bzw. $y \succsim z \succsim x$). Dann ist die Ordnung in X *dicht*. Es existieren dann Umgebungen $U_2(x) = \{z : z \in X \text{ und } x \succsim z\}$ und $V_2(x) = \{z : z \in X \text{ und } z \succsim x\}$.

Wir prüfen nach, ob die Umgebungen die *Hausdorff*schen Umgebungsaxiome befriedigen.

(A) ist sicherlich erfüllt.

(B) folgt aus $V_2(x) \subseteq V_1(x)$ und $U_2(x) \subseteq U_1(x)$, so daß $W(x) = V_2(x) \cap U_2(x) \subseteq V_1(x) \cap U_1(x)$. Man kann auch so vorgehen, was im Fall einer dichten Ordnung erlaubt ist, daß man zu einer Ordnungsfolge von Punkten $x \succsim w \succsim z \succsim y$ Umgebungen definiert, so daß $U_1(x) = \{y : y \in X \text{ und } x \succsim y\}$, $U_2(x) = \{z : z \in X \text{ und } x \succsim z\}$, $U_3(x) = \{w : w \in X \text{ und } x \succsim w\}$. Jedes $w \in U_3(x)$ ist Element von $U_1(x)$ und $U_2(x)$, also ist $U_3(x) \subseteq U_1(x) \cap U_2(x)$.

Um (C) nachzuweisen, definieren wir nur $U(z) = \{y : y \in X \text{ und } z \succsim y\}$. Der Punkt z liegt aber auch in der Umgebung $U_1(x) = \{y : y \in X \text{ und } x \succsim y\}$, d.h. $U(z) \subseteq U_1(x)$.

Das Trennungsaxiom (D) ist in einem $\succsim$-geordneten Raum erfüllt, denn für $x \neq y$ lassen sich Umgebungen $U_1(x)$ und $U_1(y)$ (bzw. $V_1(x)$ und $V_1(y)$ so wählen, daß sie disjunkt sind.

Im Fall einer $\succsim$-Ordnung auf X ersetzen wir im Beweis von Satz 2 die Worte »abgeschlossen« durch »offen«. Weitere Konsequenzen sind $U_1(x) \cup V_1(x) = X - x$ und $U_1(x) \cap V_1(x) = \varnothing$. $U_1(x)$ und $V_1(x)$ sind offen.

Wenn wir den Umgebungsbegriff so fassen wie in Satz 2, dann genügt der $\succsim$-geordnete Raum X dem Trennungsaxiom. Für Satz 2 spielt der Umstand eine Rolle, daß wir angenommen haben, X sei zusammenhängend. Es kann dann keine als Teilmengen definierte Umgebungen $U_1(x)$ und $V_1(x)$ in X geben, deren Durschschnitt leer ist.

Satz 2 folgt übrigens auch aus einem Resultat von *Nachbin* [26, S. 27, Prop. 2], wonach jeder topologische Raum mit einer abgeschlossenen Ordnung ein *Hausdorff*scher Raum ist. Man kann daraus weiter schließen (*Ward* [37, S. 145]), daß schon jeder quasigeordnete Raum ein *Hausdorff*scher Raum ist. Dies ist ein wichtiger Hinweis, wie allgemein Satz 2 gefaßt werden kann. Es wird deutlich, daß man in einem *Hausdorff*schen Raum bei der Postulierung der Präferenzordnung einen freien Entscheidungsspielraum hat, da die durch die Quasiordnung gegebenen schwächsten Ordnungspostulate dort immer erfüllt sind.

Unter Beachtung von Axiom (3) läßt sich Satz 2 in der Hinsicht erweitern, daß auch jeder $\succsim$-konvex geordnete Raum einen *Hausdorff*schen Raum bildet.

Als Zusätze zu Satz 2 haben wir Satz 3 und Satz 4. Dabei nehmen wir jetzt die schwächste Kennzeichnung für die Ordnungsrelation vor.

Satz 3: Wenn X $\succsim$-quasigeordnet und zusammenhängend ist, dann ist die Quasiordnung auf X stetig.

Als unmittelbares Korrelat zu Satz 3 gewinnt man:

Satz 4: Wenn die Quasiordnung auf X stetig ist, dann muß X zusammenhängend sein.

Satz 3 ist – dem Gedanken nach – von *Hausdorff* [15, S. 90] gesehen und von *Eilenberg* [7, 2.2] mit Hilfe des *Hausdorff*schen Stetigkeitsbegriffes bewiesen worden. Wir lassen die Beweise aus und verweisen statt dessen auf *Eilenberg*. Die Sätze 3 und 4 führen zu einigen Konsequenzen.

In einem zusammenhängenden Raum X ist jede abgeschlossene Quasiordnung stetig. (Wenn X Teilmenge von R^n ist und $\succsim$ auf X eine Quasiordnung festlegt, dann genügen Zusammenhang von X und Abgeschlossenheit der Ordnung auf X, um die Existenz einer stetigen Funktion auf X zu sichern [5, S. 56]).

In einem nicht zusammenhängenden Raum ist eine abgeschlossene Quasiordnung auch nicht stetig.

Lassen wir nun die Annahme des Zusammenhanges fallen, so gilt statt Satz 2:

Satz 5: Jeder $\succsim$-quasigeordnete Raum X ist ein nicht zusammenhängender *Hausdorff*scher Raum, wenn für zwei verschiedene Punkte $x, x' \in X$ die zugeordneten Umgebungen $U_1(x) = \{y' : y' \in X \text{ und } x \succsim y'\}$, $V_1(x) = \{y' : y' \in X \text{ und } y' \succsim x\}$ und entsprechend $U_1(x') = \{y : y \in X \text{ und } x' \succsim y\}$, $V_1(x') = \{y : y \in X \text{ und } y \succsim x'\}$ als Teilmengen in X abgeschlossen sind.

Es ist $U_1(x) \cup V_1(x) \cup U_1(x') \cup V_1(x') = X$ und $(U_1(x) \cup V_1(x)) \cap (U_1(x') \cup V_1(x')) = \varnothing$.

Wir gehen davon aus, daß die Ordnung dicht ist. Für zwei beliebige Punkte $z \neq z'$ in X sei $x \succsim z' \succsim y'$ und $y' \succsim z' \succsim x$, entsprechend sei $x' \succsim z \succsim y$ und $y \succsim z \succsim x'$. Dann ist $U_2(x) = \{z' : z' \in X \text{ und } x \succsim z'\}$ und $V_2(x) = \{z' : z' \in X \text{ und } z' \succsim x\}$, entsprechend ist $U_2(x') = \{z : z \in X \text{ und } x' \succsim z\}$ und $V_2(x') = \{z : z \in X \text{ und } z \succsim x'\}$.

Das *Hausdorff*sche Axiom (A) kann als erfüllt gelten.

(B) Für den Punkt $x \in X$ gibt es Umgebungen $U_2(x) \subseteq U_1(x)$ und $V_2(x) \subseteq V_1(x)$, so daß $W(x) = U_2(x) \cap V_2(x) \subseteq U_1(x) \cup V_1(x)$.

Entsprechendes gilt für $x' \in X$.

(C) Für den Punkt z' kann eine Umgebung definiert werden als $U(z') = \{y' : y' \in X \text{ und } z' \succsim y'\}$. Nach Voraussetzung ist aber z' auch in der Umgebung $U_1(x)$ enthalten, d.h. $U(z') \subseteq U_1(x)$. Entsprechendes gilt wiederum für eine dem Punkt z zugeordnete Umgebung.

Es ist leicht ersichtlich, daß für zwei verschiedene Punkte in X punktfremde Umgebungen existieren. Damit ist auch das Trennungsaxiom (D) erfüllt.

Satz 5 läßt sich am besten dadurch veranschaulichen, daß man X – z.B. für zwei punktfremde Umgebungen $U_1(x)$ und $V_1(x')$ – in entspre-

chende Umgebungssegmente (x, y'), (y, x') zerlegt. Dann weisen die Segmentstellen (x, x') und (y', y) Sprünge auf, die eine stetige Ordnung auf X nicht zulassen.

Für die weiteren Überlegungen ist es notwendig, daß wir einen geordneten topologischen Raum auf das Ordnungsaxiom (2) festlegen.

Satz 6: Jeder $\succsim$-teilweise geordnete Raum X ist ein *Hausdorff*scher Raum (in seiner Ordnungstopologie).

Angenommen, es gibt Punkte $x, w, z, y \in X$ mit $x \succsim w \succsim z \succsim y$, für die eine Teilordnung festgelegt ist. Diesen Punkten sind die Umgebungen $U_3(x) = \{w : w \in X \text{ und } x \succsim w\}$, $U_2(w) = \{z : z \in X \text{ und } w \succsim z\}$, $U(z) = \{y : y \in X \text{ und } z \succsim y\}$ zugeordnet. Dann läßt sich zeigen, daß eine auf X definierte reflexive, transitive und antisymmetrische Relation $R(\succsim)$ auf die Umgebungen übertragbar ist, d.h. jeder in den Umgebungen enthaltene Punkt muß in der Relation $\succsim$ zu jedem anderen Punkt stehen. Das ersieht man aus den folgenden Ableitungen.

Reflexivität: Für $x, w, z \in X$: $x \succsim x$, $w \succsim w$, $z \succsim z$ implizieren $U(x) \succsim U(x)$, $U(w) \succsim U(w)$, $U(z) \succsim U(z)$.

Transitivität: Für $x, w, z \in X$: $x \succsim w$ impliziert $U_3(x) \succsim U_2(w)$, $w \succsim z$ impliziert $U_2(w) \succsim U(z)$; $\succsim$ ist transitiv, so folgt aus $x \succsim z$: $U_3(x) \succsim U(z)$.

Antisymmetrie: Es genügt, dieses Postulat an zwei Umgebungen zu verdeutlichen. Für $x, w \in X$: $x \succsim w$ und $w \succsim x$ impliziert $x \sim w$. $U_3(x) \succsim U_2(w)$ und $U_3(w) \succsim U_2(x)$ ($U_3(w) = \{x : x \in X \text{ und } w \succsim x\}$, $U_2(x) = \{z : z \in X \text{ und } x \succsim z\}$ implizieren $U_3(x) = \{w : w \in X \text{ und } x \sim w\} = U_3(w) = \{x : x \in X \text{ und } w \sim x\}$.

Die näheren Implikate dieser Postulate können unschwer mit elementar-geometrischen Figuren verdeutlicht werden.

Der Nachweis, daß ein $\succsim$-teilweise geordneter Raum die *Hausdorff*schen Umgebungsaxiome erfüllt, läßt sich wie in Satz 2 führen.

Satz 6 geht in allgemeiner Form auf *Birkhoff* [3, Kap. 3, Theorem 13) zurück. *Birkhoff* [3, Kap. 3, Theorem 6) hat auch gezeigt, wie schon aus Satz 2 ersichtlich, daß Satz 6 richtig bleibt, wenn man ihn auf $\succsim$-vollständig geordnete Räume bezieht. *Ward* [37, Lemma 2] hat bemerkt, daß ein teilweise geordneter Raum mit einer stetigen Teilordnung (vgl. Def. 4 dieses Abschnitts) ein *Hausdorff*scher Raum ist. Wie gezeigt worden ist, muß dieser Raum zusammenhängend sein.

Zusätzlich sei bemerkt, daß es gelingen kann, eine allgemeine Nutzentheorie allein auf der Grundlage des *Hausdorff*schen Raums zu entwickeln. Mathematisch spielt dabei der Umstand eine Rolle, daß jeder metrische Raum eine topologische Struktur aufweist, daß aber umgekehrt nicht *unbedingt* jede topologische Struktur aus einer metrischen Struktur entsteht.

(Die Bedingung ist, daß die Topologie *metrisierbar* ist [8, Kap. 8], d.h. daß sie durch eine geeignete Metrik definiert werden kann.) Ebenso ist hierbei aufschlußreich, daß die durch die euklidische Metrik induzierte

Topologie die einzige mit der algebraischen Struktur verträgliche Topologie ist (Das erklärt sich daraus, daß jeder euklidische Vektorraum eine metrische Struktur und jeder metrische Raum eine topologische Struktur aufweist.)

Gehen wir andererseits von einem *Hausdorff*schen Raum aus, so stellt sich heraus, daß jeder *konvexe Hausdorff*sche Raum eine mit der algebraischen Struktur des n-dimensionalen euklidischen Vektorraums verträgliche Topologie aufweist. Dies ist gerade die metrische Topologie des R^n.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die von *Debreu* [4], [5, Kap. 4) in der metrischen Topologie des R^n erzielten Ergebnisse sich auch auf der Grundlage eines konvexen *Hausdorff*schen Raumes gewinnen lassen. Diese Folgerung stützt sich auf die mathematischen Zusammenhänge und Beweise bei *Robertson* und *Robertson* [31, Kap. I und II).

Wenden wir uns nun wieder Satz 6 zu, so müßte dieser Satz in einer auf wirtschaftstheoretische Belange zugeschnittenen Sprache wie folgt verstanden werden: Der $\succsim$-teilweise geordnete Raum X bildet einen topologischen Präferenzraum: die Punkte von X sind als Bedarfs- oder Befriedigungsziele interpretierbar. Den Bedarfszielen ist ein System von Umgebungen in X zugeordnet, die bezüglich der Ordnungsstruktur einer stärkeren Beschränkung in Form des Axioms der Vergleichbarkeit unterliegen. Mathematisch stützt sich diese Konstruktion auf eine Aussage von *Hausdorff* [15, S. 140], wonach ein $\succsim$-teilweise geordneter Raum in $\succsim$-vollständig geordnete Umgebungsmengen (als Teilmengen) zerlegbar ist. Aus wirtschaftstheoretischer Sicht wiederum ist bemerkenswert, daß der Umgebungsbegriff für die Definition einer Güterkategorie oder -gruppe herangezogen werden kann, und zwar in dem Sinne, daß alle in der Umgebung enthaltenen (vollständig geordneten) Elemente (Güter oder Bedarfsmittel) in bezug auf das Bedarfsziel »homogen« sind. In diesem Zusammenhang sprechen wir dann von Bedarfshomogenität und von bedarfshomogenen Gütern, wenn diese Güter einem Bedarfsziel zugeordnet werden können, d.h. in seiner Umgebung liegen.

Der Grundgedanke dieser Konstruktion läßt sich durch die anschauliche Beschreibung einer individuellen Präferenzsituation verdeutlichen: Angenommen, ein Student in München mit fünf Mark in der Tasche steht am Samstagabend vor der Frage, wie er sich am besten amüsiere. Er wird dann zwischen verschiedenen, ihm möglichen »unterhaltungsintensiven« Gütern und Diensten bzw. deren Kombinationen wählen: vielleicht eine Kinovorstellung am Karlsplatz oder ein Bier im Schwabinger Keller oder einmal politisches Kabarett. Anders ausgedrückt: dieser Student sucht Punkte in einer Umgebungsmenge von X, die seinem Bedarfsziel möglichst nahe kommen.

Anders als bei der auf X festgelegten Teilordnung, läßt sich die Postulierung einer vollständigen (Präferenz-)Ordnung auf den in X enthaltenen Umgebungsmengen ökonomisch rechtfertigen, weil hier das Vergleichbarkeitsaxiom sinnvoll ist. Denn in einem solchen Fall sind klare Präferenz- oder Indifferenzentscheidungen möglich, da sie immer auf ein Bedarfsziel gerichtet sind.

Der Gedanke einer an dem Bedarfsziel orientierten Präferenzentscheidung ist in [13] dargelegt worden. Er wird hier weitergeführt.

Als nächstes stützen wir uns auf Axiom (5). Wie vorteilhaft es sein kann, Kompaktheit für X zu fordern, wird aus dem noch folgenden Satz ersichtlich. Zunächst brauchen wir jedoch zwei Definitionen.

Definition 3: Ein maximales (minimales) Element in X ist ein Element $y^* \in X$ ($y_* \in X$), so daß $y \succ y^*$ ($y_* \succ y$) für *kein* $y \in X$ ($y \neq y^*$; $y \neq y_*$).

Diese Definition ist für den Fall einer Quasi- oder Teilordnung auf X nicht gleichwertig mit der Existenz eines größten (kleinsten) Elements in X. Ein größtes (kleinstes) Element in X ist ein Element $\bar{y} \in X$ ($y \in X$), so daß $\bar{y} \succsim y$ ($y \succsim \bar{y}$) für *alle* $y \in X$ ($y \neq \bar{y}$; $y \neq y$). Im Fall einer vollständig geordneten Menge kann jedoch gezeigt werden (*Birkhoff* [3, Kap. I, 9.]), daß maximale und größte (minimale und kleinste) Elemente zusammenfallen.

Definition 4: X ist mit einer unteren (oberen) halbstetigen Teilordnung (Quasiordnung) versehen, wenn für $y \in X$ die Umgebung $U(x) = \{y : y \in X$ und $x \succsim y\}$ ($V(x) = \{y : y \in X$ und $y \succsim x\}$) abgeschlossen ist (vgl. [7], S. 34).

Satz 7: Ein nichtleerer kompakter Raum X mit einer unteren (oberen) halbstetigen Teilordnung (Quasiordnung) besitzt ein minimales (maximales) Element.

Dieser Satz ist von *Birkhoff* [3, Kap. IV, Theorem 16] und *Ward* [37, Theorem 1] gegeben worden.

Hier interessiert der von *Birkhoff* genannte Fall, wo X teilweise geordnet ist.

Wenn X teilweise geordnet ist und für $x \succsim y$ (bzw. $y \succsim x$) die Umgebungen $U(x) = \{y : y \in X$ und $x \succsim y\}$ und $V(x) = \{y : y \in X$ und $y \succsim x\}$ abgeschlossen in X sind, dann folgt daraus, daß die Ordnung auf X nach unten und oben halbstetig (oder einfach stetig) ist. X ist aber auch kompakt, so daß ein minimales Element y_* und ein maximales Element y^* in den Umgebungen $U(x)$ und $V(x)$ (und somit in X) existieren. Wenn die Ordnung auf X stetig ist und wegen der Kompaktheitseigenschaft X ein minimales und maximales Element besitzt, dann ist jede auf X definierte reelle Funktion stetig und nimmt einen minimalen und maximalen Wert an. Sie ist dann nach unten und oben beschränkt. Dies folgt aus Eigenschaften halbstetiger Funktionen. An dieser Stelle ist es erlaubt, von folgender Fragestellung auszugehen: Es sei X ein kompakter, $\succsim$-teilweise geordneter topologischer Raum (*Hausdorff*scher Raum), existiert dann eine stetige, reelle Funktion (Nutzenfunktion), die vereinbar ist mit der Präferenzordnung auf X? Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir einen Satz von *Nachbin* [26, § 5, Theorem 5] in einer für unsere Zwecke abgewandelten Form zu Hilfe.

Zunächst ist aus Vereinfachungsgründen eine terminologische Veränderung zweckmäßig. Wir führen jetzt eine geeignetere Terminologie ein und setzen für die Umgebungen $V(x)$ und $U(x)$ die inhaltlich gleichwertigen

Ausdrücke $M_R(x) = \{x : x \gtrsim x',\ x, x' \in X\}$ und $M_{R-1}(x) = \{x : x' \gtrsim x,\ x, x' \in X\}$; entsprechend ist x_* bzw. x^* ein minimales bzw. maximales Element in X.

Satz 8 (Existenzsatz 1): Es sei $\bar{f}$ eine nach oben halbstetige, reelle Funktion und $\underline{f}$ eine nach unten halbstetige, reelle Funktion auf dem $\gtrsim$-teilweise geordneten, kompakten Raum X. Weiterhin sei $\bar{f} \geq \underline{f}$ erfüllt. Dann existiert eine monoton-wachsende, reelle, stetige Funktion f auf X, so daß für beliebige x gilt: $\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x)$.

Nach Satz 7 kann angenommen werden, daß wegen der Kompaktheit von X ein maximales x^* und ein minimales x_* Element in den abgeschlossenen Mengen $M_R(x)$ und $M_{R-1}(x)$ existieren. Aus der Definition der Halbstetigkeit folgt: für jeden beliebigen Punkt $b \in X$ gibt es eine in X konvergente Folge von Punkten $x_k \to b$, so daß $\overline{\lim}_{x_k \to b} f(x_k) = \bar{f}(b)$ bzw. $\underline{\lim}_{x_k \to b} f(x_k) = \underline{f}(b)$.

Nehmen wir an, es sei $b = x_*$ bzw. $b = x^*$. Dann ist $\bar{f}(x^*) \geq \bar{f}(x)$ bzw. $\underline{f}(x_*) \leq \underline{f}(x)$. (Die Ungleichung folgt aus Definition 3 in Verbindung mit der Tatsache, daß die Menge der reellen Zahlen vollständig geordnet ist.) Für $x^*, x_* \in X$ ist sicher $\underline{f}(x_*) \leq f(x) \leq \bar{f}(x^*)$.

Dann existiert eine Zerlegung in nicht disjunkte Mengen $\underline{T} = \{x : x \in M_{R-1}(x) \text{ und } \underline{f}(x) \geq \underline{f}(x_*)\}$ und $\bar{T} = \{x : x \in M_R(x) \text{ und } \bar{f}(x) \leq \bar{f}(x^*)\}$, was aus der Kompaktheitseigenschaft und der Beschränktheit der Funktionen $\underline{f}$ und $\bar{f}$ auf den abgeschlossenen Mengen $M_{R-1}(x)$ und $M_R(x)$ folgt. Für ein bestimmtes $x' \in X$ ist der Durchschnitt $\cap(\underline{T}, \bar{T}) = \{x' : x' \in \cap(M_{R-1}(x), M_R(x)) \text{ und } \underline{f}(x') = \bar{f}(x')\}$.

Dann existiert eine Folge von Funktionen, z.B. $\underline{f}(x_*) \leq \underline{f}(x_1) \leq \ldots \leq \underline{f}(x_k) = \bar{f}(x_k) \leq \ldots \leq \bar{f}(x_n) \leq \bar{f}(x^*)$, so daß $f(x)$ beliebige Funktionswerte im Intervall $\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x)$ annimmt.

Satz 9 (Existenzsatz 2): Es sei $F: X \to R$ eine Abbildung von X in die Menge der reellen Zahlen R, so daß eine monoton-wachsende, reelle und stetige Funktion $f(x)$ existiert (Existenzsatz 1).

Für jede $\gtrsim$-vollständig geordnete Teilmenge $I \subset X$ gibt es die Abbildung $G: I \to R$ und die Abbildungen $H: I \to R$, so daß $f(x) = g(h_I(x_I))$ für alle $I \in \mathfrak{J}$ und alle $x \in X$.

$\mathfrak{J} = \{A, B, \ldots, M\}$ ist ein nichtleeres System disjunkter Teilmengen $A, B, \ldots, M$ von X. Für beliebige $I \in \mathfrak{J}$ kann I gleich den Mengen $A, B, \ldots, M \in \mathfrak{J}$ sein.

Für alle x: $x \in I$ impliziert $x \in X$; andererseits $x \in X$ impliziert $x \in \cup(A, B, \ldots, M)$ (d.h. $x \in A$ oder $x \in B$ oder ... oder $x \in M$). Somit ist jedes auf die Abbildungsmenge $H(I)$ beschränkte Bild $h_I(x_I)$ Teilbild von $f(x)$ in $F(X)$. Weiterhin ist für irgendein $I = A, B, \ldots, M$ $G(I) \subset F(X)$, so daß über die Transformation g, $f(x) = g(h_I(x_I))$ für alle $I = A, B, \ldots, M$.

Zur Verdeutlichung sei noch folgender Gedankengang angeführt. Es sei $f(x) = f(x_{I1}, \ldots, x_{Ik}, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ eine Funktion der Variablen $x_{I1}, \ldots, x_{Ik}$, während $\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n$ Parameter sind. Um die später noch zu erklärende Proportionalität der Differentiale dieser Funktion anzudeuten, nehmen

wir an, eine Teilmenge I von X existiert derart, daß die *spezifische* Funktion $h_I(x_I) = h_I(x_{I1}, \ldots, x_{Ik})$ auf $H(I)$ beschränkt ist. Dann ist auch $f(x)$ für $x_{I1}, \ldots, x_{Ik}$ über die Transformation g beschränkt auf $H(I)$ und in gleichem Maße beschränkt auf $F(X)$. Stellen wir entsprechende Überlegungen bezüglich aller Teilmengen $I = A, B, \ldots, M$ an, so ergibt sich: $f(x) = g(h_A(x_A), h_B(x_B), \ldots, h_M(x_M))$.

Satz 9 kommt analytisch die gleiche Bedeutung zu wie einem Lemma von *Goldman* und *Uzawa* [10, Lemma 1], das die Existenz einer *separablen* Nutzenfunktion sichern soll.

II. Die Theorie der funktionalen Separabilität

Im ersten Abschnitt entwickeln wir einige Definitionen und Eigenschaften der Separabilität bei Nutzenfunktionen. Der Separabilitätsbegriff ist hier kein topologischer Begriff. Er ist hier begründet auf dem Begriff einer Relation (im mengentheoretischen Sinn) und unterliegt gleichzeitig einer naheliegenden wirtschaftstheoretischen Interpretation.

Die angefügten Bemerkungen weisen auf verwandte Ansätze und Begriffe in der Literatur hin und auf einige oft dogmenhistorisch bemerkenswerte Einzelheiten. Einige Sätze werden nicht bewiesen, da Beweise in der Literatur vorliegen.

Der zweite Abschnitt erweitert die Eigenschaften der Separabilität bei Berücksichtigung von Zeitpräferenzen. Dabei ergeben sich Berührungspunkte zu Arbeiten von *Koopmans* [19] und *Diamond* [6], wo intertemporale Nutzenfunktionen, ableitbar aus intertemporalen Präferenzordnungen, im Hinblick auf die Existenz bestimmter (optimaler) Wachstumsprogramme untersucht werden.

1. Definitionen und Eigenschaften

Der fundamentale Begriff, der für die Definition der Separabilität in der Literatur herangezogen wird, ist die marginale Substitutionsrate. Gewöhnlich wird sie so erklärt: Es sei $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine auf der Menge der Gütervariablen X definierte Funktion: die *marginale Substitutionsrate* ist definiert als $\partial f/\partial x_i / \partial f/\partial x_j = f_i/f_j$ für $i \neq j$. Wenn wir X mit einer Ordnungstruktur versehen, ist es sinnvoll, von einer marginalen Präferenzrate zu sprechen.

Dazu führen wir folgende Konvention ein:

Für beliebige Veränderungen von x_i und x_j schreiben wir $x_i R' x_j$. Soll eine Veränderung von x_i und x_j zu einer dritten Variablen x_k betrachtet werden, so ist die ausführliche Schreibweise $(x_i R' x_j)\, R' x_k$ zulässig. (In der üblichen Funktionsschreibweise lautet der letzte Ausdruck $\partial\,(\partial f/\partial x_i / \partial f/\partial x_j) / \partial x_k = \partial\,(f_i/f_j) / \partial x_k$.) Nach entsprechender Indizierung setzen wir für $x_i R' x_j$ kürzer ${}_{ij}R'$, für den Ausdruck $(x_i R' x_j)\, R' x_k$ schreiben wir kürzer ${}_{ij}R''_k$.

(Als Sonderfall setzen wir ${}_{ij}R'' = \partial\,(\partial f/\partial x_i) / \partial x_j$.)

Eine ähnliche Schreibweise ist von *Leontief* [24] benutzt worden. Ihre Verwendung stützt sich hier auf die Tatsache, daß der Begriff einer Funktion als ein besonderer Fall einer Relation aufgefaßt werden kann (*Kuratowski* [21, Kap. IV, § 1]).

Aus $(x_i, x_j) \in R$ $(R \subset I \times J)$ folgt immer die funktionale Beziehung $(x_i, x_j) \in f$ $(f \subset I \times J)$.

Gewöhnlich charakterisieren wir also das Verhältnis zweier partieller Ableitungen mit dem Relationssymbol R' und die Veränderung dieses Verhältnisses (in bezug auf eine dritte Variable) mit R''.

Jetzt verwenden wir diese Konvention in einigen Definitionen und Sätzen.

Definition 1: Es sei $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine auf dem $\succsim$-teilweise geordneten (kompakten) Raum X definierte und dort existente Nutzenfunktion. Existieren Punkte x_i, x_j, x_k $(i \neq j \neq k)$ in X, so heißt $f(x)$ *separabel*, wenn es eine Relation R'' gibt mit ${}_{ij}R''_k = 0$. Ist ${}_{ij}R''_k \neq 0$, so nennen wir die durch eine Nutzenfunktion repräsentierte Präferenzstruktur *interdependent*.

Im Fall ${}_{ij}R''_k > 0$ sprechen wir im Rahmen dieser Theorie von Komplementarität (wenn die durch k induzierte Nachfrageänderung von i oder j oder beiden positiv ist), im Fall ${}_{ij}R''_k < 0$ von Substitution (wenn die durch k induzierte Nachfrageänderung von i oder j oder beiden negativ ist).

Andere, jedoch verwandte Definitionen der Separabilität sind von *Leontief* [24] und *Sono* [33] gegeben worden. *Leontief* prägte den Begriff der *lokalen* Separabilität, deren Eigenschaften der Infinitesimalrechnung entlehnt wurden. Nach *Leontief* ist X eine Menge von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine stetige Funktion mit zumindest zwei partiellen Ableitungen. Weiterhin ist $S \subset X$ und $\bar{S} = X - S$. S ist lokal (funktional-)separabel an dem Punkt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in X, wenn $f(x)$ die Darstellung $f(x) = f(h(S), \bar{S})$ erlaubt.

Definition 1 impliziert den Begriff der Unabhängigkeit, der wohl in der ordinalen Nutzentheorie bei *Hicks* und *Allen* [16] auftaucht und der nach Anwendung der Quotientenregel in der Differentialrechnung ausgeschrieben lautet:

$$\frac{\partial^2 f/\partial x_i\,\partial x_k \cdot \partial f/\partial x_j - \partial^2 f/\partial x_j \partial x_k \cdot \partial f/\partial x_i}{\partial^2 f/\partial x_j^2} = (f_{ik}f_j - f_{jk}f_i)\,/\,f_{jj} = 0.$$

Das läuft darauf hinaus, daß ${}_{ij}R' = R_{ij}(x_i, x_j)$ (*Green* [14, Kap. 3, Lemma 2.2]).

Hier muß betont werden, daß *Frisch* [9] einen Begriff der Unabhängigkeit (Bedarfsunabhängigkeit) vorgeschlagen hat, der nicht invariant gegenüber monotonen Transformationen des Nutzenindexes ist. *Frischs* Verfahren enthält engere Voraussetzungen, als der Theorie der funktionalen Separabilität zugrunde liegen. Dennoch soll sein origineller Gedanke kurz erläutert werden.

Frisch geht davon aus, daß dem Grenznutzen (*Frischs* Terminologie)

(1) $u_i = \partial u\,(x_1, \ldots, x_n) \,/\, \partial x_i = u_i\,(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ die zu (1) inverse Funktion

(2) $x_i = \partial x\,(u_1, \ldots, u_n) \,/\, \partial u_i = x_i\,(u_1, \ldots, u_n)$ entspricht. Mit Hilfe von 2) definiert er die sogenannte Bedarfselastizität $x_{ik} = (\partial x_i\,(u_1, \ldots, u_n) \,/\, \partial u_k) \cdot (u_k/x_i\,(u_1, \ldots, u_n))$ $(i, k = 1, \ldots, n, i \neq k)$. Mit Hilfe von (1) gelangt er zu einem dazu inversen Ausdruck der Nutzenakzeleration $u_{ik} = (\partial u_i\,(x_1, \ldots, x_n) \,/\, \partial x_k) \cdot (u_k/x_i\,(u_1, \ldots, u_n))$. Nach dieser begrifflichen Klarstellung kann die Bedarfsunabhängigkeit so ausgesprochen werden:

(a) Gut i ist bedarfsunabhängig von allen anderen Gütern $k = 1, \ldots, n$, wenn $x_{ik} = 0$ für $i \neq k$. Ebenso gilt die Symmetrie $x_{ki} = 0$, $k \neq i$.

(b) Gut i ist bedarfsunabhängig von allen anderen k, wenn der Grenznutzen nur von der Menge des Gutes i und nicht von derjenigen des Gutes k $(k \neq i)$ abhängt, so daß $u_{ik} = u_{ki} = 0$.

Einige Eigenschaften aus Definition 1 sind zunächst feststellbar: ${}_{ij}R''_k = 0$ ist 1. symmetrisch und 2. transitiv.

1. ${}_{ij}R''_k = {}_{ji}R''_k = 0$.

2. Wenn ${}_{ij}R''_k = 0$ und ${}_{jk}R''_i = 0$, dann ist auch ${}_{ik}R''_j = 0$.

Schließlich folgt als Konsequenz des Unabhängigkeitspostulats: 3. ${}_{ij}R''_k = {}_{jk}R''_i = {}_{ik}R''_j = 0$ steht im Widerspruch zu ${}_{jk}R'' \neq 0$, d.h. ${}_kR''_i$ impliziert ${}_{jk}R'' = 0$.

Definition 2: Es seien I, J, K Teilmengen von X. Wenn für jedes Element $x_i \in I$, $x_j \in J$, $x_k \in K$ die Relation ${}_{ij}R''_k = 0$ entsprechend ${}_{IJ}R''_K = 0$ impliziert, dann heißt $f\,(x)$ separabel auf X.

(${}_{IJ}R''_K$ lautet in Funktionsschreibweise $\partial\,(\partial f/\partial x_I/\partial f/\partial x_J) \,/\, \partial x_K$.)

Wie nach Definition 1 vermerken wir die Eigenschaften:

1. ${}_{IJ}R''_K = {}_{JI}R''_K$ (Symmetrie).

2. Wenn ${}_{IJ}R''_K = 0$ und ${}_{JK}R''_I = 0$, dann ist ${}_{IK}R''_J = 0$.

3. ${}_{IJ}R''_K = {}_{JK}R''_I = {}_{IK}R''_J = 0$ steht im Widerspruch zu ${}_{JK}R'' \neq 0$, also ${}_{JK}R''_I$ impliziert ${}_{JK}R'' = 0$.

Definition 3: $f\,(x)$ heißt auch dann separabel, wenn für beliebige Elemente $x_i, x_{i'} \in I$ und für beliebige Elemente $x_j, x_{j'} \in J$ die Relation ${}_{ii'}R''_{jj'} = 0$ erfüllt ist. I bildet dann eine separable Menge in X. Gilt ${}_{jj'}R''_{ii'} = 0$, so ist auch J eine separable Menge in X. Sind beide Relationen erfüllt, so sind I und J separable Mengen in X.

Zunächst stellen wir fest, daß verschiedene Möglichkeiten, die Separabilität begrifflich zu erfassen, offenstehen. Es erscheint jedoch notwendig, eine möglichst allgemeine Betrachtung zu wählen, die eine Differenzierung der Separabilität zuläßt. Das wollen wir jetzt tun.

Definition 4: $f\,(x)$ heißt in bezug auf das System $\{A, B, \ldots, M\}$ von X *schwach* separabel, wenn für beliebige Elemente $x_i, x_{i'} \in I$ und $x_k, x_{k'} \in K$ $(I, K = A, B, \ldots, M, I \neq K)$ die Relationen ${}_{ii'}R''_k = 0 = {}_{kk'}R''_i$ befriedigt werden.

Eine verwandte Definition der schwachen Separabilität ist implizit in *Leontief*s Theorem I [24] enthalten, wenn auch seine Komplementärmenge $\bar{S}$ keine separable Menge in unserem Sinne bildet, da sie eine umkehrbare Relation nicht zuläßt, wie sie in Definition 3 verlangt ist. Auf diesen Unterschied hat der Verfasser in [13] hingewiesen. Während die Definition von *Leontief* [24], [25], *Sono* [33], *Rajaoja* [30] sich auf die Existenz separabler Mengen in X stützen, gehen *Strotz* [34], [35], *Goldman* und *Uzawa* [10], *Gorman* [11] und *Green* [14] bei ihren Definitionen der Separabilität von der Nutzenfunktion aus. Wie sich zeigen wird, ist die formale Verschiedenheit der Ansatzpunkte nur von geringer Bedeutung für die Gesamtanalyse.

Satz 1: $f(x)$ ist in bezug auf $\{A, B, \ldots, M\}$ schwach separabel, wenn gilt

(a) für beliebige $x_i, x_{i'} \in I$, $x_k, x_{k'} \in K$ ($I, K = A, B, \ldots, M$, $I \neq K$) ist ${}_{ii'}R''_{kk'} = 0 = {}_{kk'}R''_{ii'}$.

Daraus folgt (allgemein) ${}_{ii'}R' = R_I(x_{i1}, \ldots, x_{it})$. In Worten: Die marginale Präferenzrate zwischen beliebigen $x_i, x_{i'}$ ist nur eine Funktion der Variablen der gleichen Gruppe.

(b) $f(x)$ kann in der Form $f(x) = g(h_A(x_A), h_B(x_B), \ldots, h_M(x_M)) = g(h_A(x_{a1}, \ldots, x_{a_\alpha}), h_B(x_{b1}, \ldots, x_{b_\beta}), \ldots, h_M(x_{m1}, \ldots, x_{m_\mu}))$ geschrieben werden, wobei $h_A(x_A), \ldots, h_M(x_M)$ entsprechend spezifische Funktionen bezeichnen, deren Argumente auf den Teilmengen $A, B, \ldots, M$ beschränkt sind und wobei g eine geeignete Transformation ist. (a) läßt sich leicht aus der vorstehenden Definition 4 entnehmen.

Wegen (b) erinnern wir an Satz 9 (Kap. I). Es ist dort gezeigt worden, daß eine Transformation g existiert, so daß $f(x) = g(h_A(x_A), \ldots, h_M(x_M))$. Hier genügt es zu zeigen, daß (a) (b) impliziert.

Angenommen, ${}_{ii'}R''_k = 0$, so daß ${}_{ii'}R' = R_I(x_{i1}, \ldots, x_{it})$. Dann existieren spezifische Funktionen $h_I(x_I) = h_I(x_{i1}, \ldots, x_{it})$ für $I = A, B, \ldots, M$ (d.h. es gibt Funktionen $h_A(x_A) = h_A(x_{a1}, \ldots, x_{a_\alpha}), \ldots, h_M(x_M) = h_M(x_{m1}, \ldots, x_{m_\mu})$). Andererseits gibt es nach Satz 9 eine Transformation g, so daß $f(x)$ die unter (b) genannte Form annimmt, wenn (a) gilt.

Einige aus Satz 1 folgende Eigenschaften sollen jetzt angegeben werden.

1. Wenn die Menge I selbst keine Zerlegung in Teilmengen erlaubt – eine solche Menge nennt *Leontief* [44] *primitiv* separabel – ist $h_I(x_I)$ auch nicht schwach separabel im Sinne von Definition 4. Die $h_I(x_I)$ zugrundeliegende Präferenzstruktur ist dann interdependent. Denn ist das nicht der Fall, so folgt definitionsgemäß für $x_i, x_{i'}, x_{i''} \in I$, ${}_{ii'}R''_{i''} = 0$ impliziert ${}_{ii'}R' = R_I(x_i, x_{i'})$, so daß $x_{i''} \notin R_I$ impliziert, nach Definition 4, $x_{i''} \notin I$. Dies ist aber unmöglich, also ist $h_I(x_I)$ unter dieser Bedingung nicht schwach separabel. Später werden wir jedoch einen Fall kennenlernen, wo $h_I(x_I)$ stark separabel sein kann, obwohl $f(x)$ schwach separabel ist.

2. Für jede beliebig kleine Änderung von $f(x)$ haben wir das Differential:

$$df = \sum_{I=A}^{M} \sum_{j=1}^{p=\alpha,\beta\ldots,\mu} (\partial f/\partial x_{Ij})\, dx_{Ij} = dg = \sum_{I} (\partial g/\partial h_I)\, dh_I =$$

$$= \sum_{I} \sum_{j} (\partial g/\partial h_I)\,(\partial h_I/\partial x_{Ij})\, dx_{Ij}\ (I = A, B, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, p).$$

3. Für alle $I = A, B, \ldots, M$; $j, k = 1, \ldots, p$ $(j \neq k)$; $p = \alpha, \beta, \ldots, \mu$ gilt:

$\partial f/\partial x_{Ij} = (\partial g/\partial h_I)\,(\partial h_I/\partial x_{Ij})$ und entsprechend

$\partial f/\partial x_{Ik} = (\partial g/\partial h_I)\,(\partial h_I/\partial x_{Ik})$, so daß

$\partial f/\partial x_{Ij}/\partial f/\partial x_{Ik} = \partial h_I/\partial x_{Ij}/\partial h_I/\partial x_{Ik}$

oder in der hier eingeführten Terminologie

$${}_{jk}R' = R_I\,(x_{Ij}, x_{Ik}).$$

Die zweite und dritte Eigenschaft sind von *Green* [14, Kap. 2, Theorem 1] zum Beweis der Notwendigkeit von *Leontiefs* schwacher Separabilität angegeben worden. *Leontiefs* Theorem I [24] ist bereits enthalten in *Sonos* Arbeit [35, Prop. 1 und 2] in dem Sinne, daß *Sono* die hinreichende Bedingung für *Leontiefs* Theorem liefert. *Green* [14, Kap. 2] benutzt schließlich *Sonos* Beweistechnik, um zu zeigen, daß *Leontiefs* Theorem auch die hinreichende Bedingung enthält. *Strotz* [34] stützt sich auf Eigenschaften der schwachen Separabilität, um die Existenz eines »Nutzenbaumes« (»Utility Tree«) nachzuweisen. Irrtümlicherweise setzt er in einigen Ableitungen stärkere Eigenschaften voraus, als sie der schwachen Separabilität innewohnen. Seinen Irrtum korrigiert er in [35] nach einer diesbezüglichen Kritik von *Gorman* [11]. *Goldman* und *Uzawa* [10, Theorem 2] beweisen einen Satz über schwache Separabilität mit Hilfe der *Integrierbarkeitsbedingung*, nachdem sie in ihrem vorbereitenden Lemma 1 gezeigt haben, daß eine Transformation F für ihre Nutzenfunktion existiert mit $f(x) = F(g(x))$ für alle x in X, dann und nur dann, wenn $f(x)$ und $g(x)$ zweifach differenzierbar sind und jede Indifferenzhyperfläche ein zusammenhängendes Gebiet beschreibt. Demnach ist $f(x)$ schwach separabel, wenn die marginale Substitutionsrate die gewünschte Bedingung (der schwachen Separabilität) erfüllt.

Erwähnenswert ist noch, daß *Nataf* [27] den grundlegenden Gedanken der Separabilität für die Lösung des *Klein*schen Aggregationsproblems verwendet hat.

Wenn auch *Natafs* Fragestellung eine andere ist und den Ausgangspunkt seiner Betrachtungen nicht die Nutzenfunktion bildet, so sind doch seine Ergebnisse auch aus der Sicht einer Theorie der Separabilität von Interesse. Wir verwenden im wesentlichen *Natafs* Terminologie [27, S. 232f.].

Es seien $x_{r1}, \ldots, x_{r_\rho}$, $n_{s1}, \ldots, n_{s_\sigma}$, $z_{t1}, \ldots, z_{t_\tau}$ elementare (nicht aggregierte), beliebigen Gruppen r, s, t zugeordnete unabhängige Variable (z. B. homogene Faktoren in einer Produktionsfunktion), denen Aggregate X, N, Z so zugeordnet werden sollen, daß die einfachen funktionalen Beziehungen $X = G(x_{r1}, \ldots, x_{r_\rho})$, $N = H(n_{s1}, \ldots, n_{s_\sigma})$, $Z = I(z_{t1}, \ldots, \ldots, z_{t_\tau})$ erfüllt sind. Man betrachte beispielsweise x_{r1} als Funktion aller elemen-

taren Variablen und schreibe $x_{r1} = f_{r1}\,(x_{r2}, \ldots, x_{r_\rho}; n_{s1}, \ldots, n_{s_\sigma}; z_{t1}, \ldots, z_{t_\tau})$.

Um das *Klein*sche Aggregationsproblem zu lösen, zeigt *Nataf*, daß nach Bildung der partiellen Ableitungen $\partial x_{r1}/\partial x_{rk}\,(k = 2, \ldots, \varrho)$, $\partial x_{r1}/\partial n_{sj}$ $(j = 1, \ldots, \sigma)$, $\partial x_{r1}/\partial z_{ti}\,(i = 1, \ldots, \tau)$ die folgenden Äquivalenzbeziehungen erfüllt sein müssen:

(a) $\partial x_{r1}/\partial x_{rk} \,/\, \partial x_{r1}/\partial x_{rn} \equiv -\partial G/\partial x_{r1} \,/\, \partial G/\partial x_{rk} \equiv g\,(x_{rk})$; $(k, n = 2, \ldots, p, k \neq n)$.

(b) $\partial x_{r1}/\partial n_{sj} \,/\, \partial x_{r1}/\partial n_{sm} \equiv \partial H/\partial n_{sj} \,/\, \partial H/\partial n_{sm} \equiv h\,(n_{sj}, n_{sm})$; $(j, m = 1, \ldots, \sigma, j \neq m)$.

(c) $\partial x_{r1}/\partial z_{ti} \,/\, \partial x_{r1}/\partial z_{tq} \equiv \partial I/\partial z_{ti} \,/\, \partial I/\partial z_{tq} \equiv i\,(z_{ti}, z_{tq})$; $(i, q = 1, \ldots, \tau, i \neq q)$.

In (a), (b), (c) sind zugleich die Bedingungen der schwachen Separabilität erfüllt und f_{r1} ist schwach separabel.

Die bisher in der Literatur benutzten und hier erwähnten Sätze über Eigenschaften der Separabilität treffen weder spezifische Vereinbarungen über die Ordnungsstruktur noch über die topologische Struktur von X, wie sie in Kapitel I getroffen worden sind.

Eine starke Restriktion der Separabilität ist mit der Einführung der folgenden Definition verbunden.

Definition 5: $f\,(x)$ heißt in bezug auf $\{A, B, \ldots, M\}$ *stark* separabel, wenn für $x_i \in I$, $x_j \in J$, $x_k \in K$ $(I, J, K = A, B, \ldots, M;\ I \neq J \neq K)$ die Relation ${}_{ij}R''_k = 0$ impliziert ${}_{IJ}R''_K = 0$.

Der Begriff der starken Separabilität geht bereits auf *Leontief* [24], [25] zurück, ebenso wird er verwendet von *Rajaoja* [30, § 11] für die Darstellung stark separabler Gruppen. *Strotz*' starke Separabilität [35] verlangt (in seiner Terminologie), daß $\partial\,(\partial U/\partial q_a \,/\, \partial U/\partial q_b) \,/\, \partial q_m = 0$ $(q_m \in M,\ q_a, q_b \notin M)$. In dieser Form ist *Strotz*' Separabilität offensichtlich schwächer als Definition 5, denn nach *Strotz* würde es genügen, wenn q_a, q_b in einer zu M komplementären Menge liegt. *Strotz* [35] hat außerdem gezeigt, daß die Definition der starken Separabilität diejenige der schwachen Separabilität einschließt, wenn die Menge X nur einer Zerlegung in zwei Teilmengen fähig ist. Definition 5 impliziert, ebenso wie Definition 1 die Unabhängigkeit in der direkt additiven Nutzenfunktion festlegt, Additivität und damit Unabhängigkeit der Gütergruppen voneinander. Eine solche Nutzenfunktion, in der die Unabhängigkeit der Gütergruppen eine Rolle spielt, heißt additiv separabel. Der Nachweis dafür, daß der Begriff der Unabhängigkeit im Sinne der direkten Additivität der Nutzenfunktion einen allgemeineren Ausdruck in der additiven Separabilität findet, erleichtert den Beweis des noch folgenden Satzes 2.

Leontief [24], [25] hat in einem Lemma unter Verwendung seiner Definition der starken Separabilität gezeigt, daß bei Existenz von mindestens drei disjunkten Teilmengen die spezifischen Funktionen in $f\,(x)$ additiv verknüpfbar sind und so $f\,(x)$ additiv separabel ist. Die Gültigkeit dieses Lemmas benutzt *Leontief* zum Beweis seines grundlegenden Satzes über starke Separabilität [24, Theorem 2].

Satz 2: $f(x)$ ist in bezug auf $\{A, B, \ldots, M\}$ stark separabel, wenn gilt:

(a) für $x_i \in I,\ x_j \in J,\ x_k \in K$ $(I, J, K = A, B, \ldots, M;\ I \neq J \neq K)$ ${}_{ij}R''_k = 0$ impliziert ${}_{IJ}R''_K = 0$.

(b) $f(x)$ ist in der additiv separablen Form $f(x) = g(h_A(x_A) + h_B(x_B) + \ldots + h_M(x_M)) = g(h_A(x_{a1}, \ldots, x_{a_\alpha}) + h_B(x_{b1}, \ldots, x_{b_\beta}) + \ldots + h_M(x_{m1}, \ldots, x_{m_\mu}))$ darstellbar, dann und nur dann, wenn X eine Zerlegung in mehr als zwei Teilmengen erlaubt.

Es genügt hier wieder zu zeigen, daß (a) (b) impliziert.

Aus ${}_{ij}R''_k = 0$ folgt ${}_{ij}R' = R_{ij}(x_i, x_j)$. Andererseits folgt aus ${}_{ij}R''_k = 0$ auch ${}_{ij}R'' = 0$, woraus wiederum $\partial f/\partial x_i = R_i(x_i)$ und $\partial f/\partial x_j = R_j(x_j)$ ableitbar ist. Da nach (a) ${}_{ij}R''_k = 0$ impliziert ${}_{IJ}R''_K = 0$ lassen sich die Überlegungen gleichermaßen auf x_I, x_J, x_K übertragen.

Green [14, Kap. 3, Lemma 2.1] hat bewiesen: Wenn $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\partial f/\partial x_q = R_q(x_q)$ $(q = 1, \ldots, n)$ existiert, dann besitzt $f(x)$ die additive Form $f(x) = h_1(x_1) + h_2(x_2) + \ldots + h_n(x_n)$. Benutzen wir nun den Nachweis, daß das Differential der Funktion $f(x) = g(h_A(x_A), h_B(x_B), \ldots, h_M(x_M))$ gleich $df = \sum_{I=A}^{M} \sum_{j=1}^{p} (\partial g/\partial h_I)(\partial h_I/\partial x_{Ij})\, dx_{Ij}$ $(p = \alpha, \beta, \ldots, \mu)$ ist, so folgt, daß die Differentiale df und dh_I proportional sind, so daß (unter entsprechender Benutzung von *Greens* Lemma) bei Additivität der spezifischen Funktionen $h_I, f(x)$ additiv separabel ist.

Satz 2 läßt sich auch verdeutlichen, wenn wir die Eigenschaften $\partial f/\partial x_I = R_I(x_I)$, $\partial f/\partial x_J = R_J(x_J)$, $\partial f/\partial x_K = R_K(x_K)$ benutzen. Es wäre dann möglich, mit der Konstruktion zu arbeiten, daß alle *Güterbündel* bis auf eines konstante Werte annehmen, so daß sich z.B. ergibt: $f_A(x) = g(h_A(x_A), h_B(x^0{}_B), \ldots, h_M(x^0{}_M))$, $f_B(x) = g(h_A(x^0{}_A), h_B(x_B), \ldots, h_M(x^0{}_M))$, $\ldots$, $f_M(x) = g(h_A(x^0{}_A), h_B(x^0{}_B), \ldots, h_M(x_M))$. Die Funktion $f(x)$ ist bei Variation nur eines Bündels auf dieses (und nur auf dieses) beschränkt, so daß $f(x)$ bei Variation aller Güterbündel $x_A, x_B, \ldots, x_M$ nur in der Form $f(x) = \sum_I f_I(x) = \sum_I g(h_I(x_I))$ existieren kann, d.h. wenn $f(x)$ additiv separabel ist.

Ein Beweis, daß starke Separabilität additive Separabilität (bei mehr als zwei Gütergruppen) impliziert, ist von *Green* [14, Kap. 3, Theorem 2] in vollständiger Form gegeben worden. Er stützt sich dabei auf zwei Lemmata, betreffend die Existenz einer additiven Nutzenfunktion [14, Kap. 3, Lemma 2.1] und den Nachweis der Unabhängigkeit von *Houthakkers* direkt additiver Nutzenfunktion [14, Kap. 3, Lemma 2.2]. Den dort gegebenen Beweisgedanken haben wir für Satz 2 benutzt. Unabhängig davon haben *Goldman* und *Uzawa* [10] einen Beweis geliefert, der unter Verwendung ihres grundlegenden Lemmas [10, Lemma 1] (das die Existenz einer Transformation F zeigt) ebenfalls die Äquivalenz von starker und additiver Separabilität bei mehr als zwei separablen Teilmengen (Gruppen) nachweist.

In Verbindung mit der Lösung des *Klein*schen Aggregationsproblems kann – dem Gedanken nach – der Satz über starke (additive) Separabilität schon *Nataf* [27] zugeschrieben werden.

Nataf hat indessen nicht nur die Eigenschaften schwacher und starker (additiver) Separabilität für die Lösung des Aggregationsproblems verwendet, sondern seine Arbeit weist deutlich darauf hin, unter welchen Bedingungen es möglich erscheint, daß beide Separabilitätskonzeptionen auf verschiedenen Aggregations- (oder Separabilitäts-)stufen miteinander verträglich sind. Auf systematische Weise ist dieser Gedanke für die Theorie der funktionalen Separabilität von *Pearce* [28] aufgegriffen worden, dessen Arbeit notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zerlegung einer Gütergruppe (Teilmenge von X) in elementare Gütergruppen (nachgeordnete Teilmengen) oder Basisgruppen festlegt [12].

Der Separabilitätsprozeß vollzieht sich nach *Pearce* auf zwei Separabilitätsstufen. Auf der ersten Stufe nimmt *Pearce* schwache Separabilität an, die er durch seine plausible Hypothese der »Substitutionslücke« (»marked gap«) bei verschiedenen Gütergruppen empirisch zu untermauern versucht. Auf der zweiten Stufe führt er starke (additive) Separabilität ein, wenn jede Gütergruppe (der ersten Stufe) zerlegungsfähig ist und die Anzahl der in dieser Gruppe enthaltenen Güter mehr als zwei beträgt.

Wir fahren fort mit

Definition 6: $f(x)$ heißt separabel *im Sinne von Pearce*, dann und nur dann, wenn 1. $f(x)$ schwach separabel ist (Definition 4) und 2. wenn jede der spezifischen Funktionen $h_I(x_I)$ $(I = A, B, \ldots, M)$ stark (additiv) separabel ist (Definition 5), d.h. wenn die Anzahl der in jeder Gruppe enthaltenen Güter mehr als zwei beträgt.

Satz 3: $f(x)$ ist separabel im Sinne von *Pearce* in bezug auf $\{A, B, \ldots, M\}$, wenn 1. $f(x)$ in der Form $f(x) = g(h_A(x_A), h_B(x_B), \ldots, h_M(x_M))$ und 2. wenn $h_I(x_I)$ $(I = A, B, \ldots, M)$ stark (additiv) separabel ist, so daß es Funktionen h_{ij} $(j = 1, \ldots, p)$ gibt mit $f(x) = g(h_I(h_{i1}(x_{i1}) + h_{i2}(x_{i2}) + \ldots + h_{ip}(x_{ip}))$ für alle $I = A, B, \ldots, M$, $p = \alpha, \beta, \ldots, \mu$.

Der Beweis von Satz 3 läßt sich aus den Beweisen für die schwache (Satz 1) und starke Separabilität (Satz 2) ableiten, er soll deshalb hier nicht gegeben werden. Eine ausführliche Form des Satzes ist in [13] enthalten. Auf den Zusammenhang zwischen schwacher und starker Separabilität bei verschiedenen Separabilitätsstufen und auf die Verträglichkeit beider Separabilitätskonzeptionen haben *Goldman* und *Uzawa* [10, Theorem 3] hingewiesen. *Pearce* [29] hat bewußt seine Konzeption derjenigen von *Frisch* [9] gegenübergestellt und darauf aufmerksam gemacht, daß seine »Hypothese des neutralen Bedarfs« (»neutral want association«) für sich in Anspruch nehmen könne, nur eine eindeutige Bestimmung des Nutzenindex bis auf (positive) monotone Transformationen zu erlauben.

In [12, S. 350] ist behauptet worden – bezugnehmend auf *Pearce* [29, S. 209] –, daß sich auf der zweiten Stufe der *Pearce*schen Separabilität die Unabhängigkeit (im Ausdruck der additiven Nutzenfunktion) als eine Eigenschaft einschleicht, die nicht invariant gegenüber (positiven) monotonen Transformationen ist. Wie sich herausstellt, ist diese Aussage nur korrekt, wenn auf der zweiten Stufe die spezifische Funktion die additive

Form $h_I(x_I) = h_{i1}(x_{i1}) + \ldots + h_{ip}(x_{ip})$ annimmt, d.h. als eine *Jevons*sche Nutzenfunktion darstellbar ist. Diese Folgerung kann man dem *Green*schen Lemma [14, Kap. 3, Lemma 2.1] entnehmen. In diesem speziellen, mit der *Pearce*schen Separabilität verträglichen Fall, ist $h_I(x_I)$ nicht invariant gegenüber (positiven) monotonen Transformationen, doch berührt dieser Fall wegen der Transformation g nicht die Invarianz von $f(x)$. Geht man jedoch von dem allgemeinen Fall $h_I(x_I) = h_I(h_{i1}(x_{i1}) + \ldots + h_{ip}(x_{ip}))$ aus, dann ist auch $h_I(x_I)$ invariant gegenüber (positiven) monotonen Transformationen. Der erste Fall ist empirisch am restriktivsten, und es ist zu vermuten, daß *Pearce* ihn nicht gemeint hat, dennoch ist er vereinbar mit seiner Konzeption der Separabilität.

Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Separabilitätskonzeptionen ist von *Goldman* und *Uzawa* [10] mit Hilfe der *Slutsky*schen Theorie in aller Genauigkeit dargestellt worden. Eine wesentliche Voraussetzung dafür ist, daß $f(x)$ *quasi*-konkav ist [10, 6.]. Dies ist eine wenig schwächere Voraussetzung als konkav.

Die hier entwickelte schwache und starke Separabilität stützt sich gedanklich auf Arbeiten von *Leontief* [24], [25], *Rajaoja* [30], *Sono* [33] und *Strotz* [34]. Dort taucht der gemeinsame Gedanke auf, daß die Menge der Gütervariablen X in Teilmengen zerlegbar sei, die physisch gesehen als Gütergruppen, monetär gesehen – nach Definition von geeigneten Preisindizes (Kap. III.) – als Budgetkategorien zu verstehen seien. Ein Teilproblem dieses Gedankenkomplexes – die Frage der Aggregation elementarer Gütervariablen zu Güterbündeln – ist zeitlich schon vor den genannten Arbeiten behandelt worden.

Dieses Problem ist maßgeblich durch Arbeiten von *Leontief* [23] und *Hicks* [17] gelöst worden, die die zulässigen Bedingungen einer solchen Aggregation festgelegt haben. Doch muß sogleich an dieser Stelle auf einen wesentlichen Unterschied zur üblichen Aggregationsproblematik hingewiesen werden. Wenn allgemein von »Aggregation« die Rede ist, so versteht man darunter zumeist eine »doppelseitige« Aggregation in dem Sinne, daß den unabhängigen Variablen in einer Nutzen- oder Produktionsfunktion entsprechend abhängige Variablen der gleichen Aggregationsstufe gegenüberstehen. Nicht so beim *Leontief-Hicks*schen Theorem. Hier handelt es sich um ein »einseitiges« Aggregationsproblem, nämlich um das Problem der Gruppierung (Aggregierung) der unabhängigen Variablen in einer Funktion.

Das *Leontief*sche Kriterium verlangt für die Aggregation von elementaren unabhängigen Variablen zu Güterbündeln (»composite commodities«) die folgenden zwei Annahmen:

1. Die zu aggregierenden Elementargüter müssen so bewertet sein, daß sie dem gleichen Indifferenzsystem angehören, das heißt, sie müssen auf der gleichen Indifferenzkurve bzw. -hyperfläche liegen.

2. Ändert sich die Struktur der in ein Indifferenzsystem eingehenden gleichwertigen Güter, etwa in der Art einer Expansion oder Kontraktion der Gütereinheiten, so kann diese Änderung nur in einem proportionalen Verhältnis erfolgen, und zwar so, daß alle möglichen Güterkombinationen

auf verschiedenen vom Ursprung des Indifferenzsystems ausgehenden Expansionspfaden liegen.

Sind beide Erfordernisse gleichzeitig erfüllt, so zeigt *Leontief*, daß das Aggregat analytisch wie ein elementares (individuelles) Gut behandelt werden kann.

Das *Hicks*sche Kriterium (*Hicks* [17, S. 33 u. S. 312f.]) läßt eine (im Sinne eines Dualitätsverhältnisses von Gütern und Preisen [5, Kap. 2]) duale Interpretation zu. Verändern sich die Preise innerhalb einer Gütergruppe in der Weise, daß die relativen Preise der dieser Gruppe angehörigen Güter konstant bleiben (d.h. verändern sich die absoluten Preise proportional), so läßt sich das Güteraggregat analytisch wie ein individuelles Gut behandeln. Als Einschränkung muß bemerkt werden, daß das *Leontief-Hicks*sche Theorem für Gleichgewichtssituationen bei vollständigem Wettbewerb geschaffen ist unter Bedingungen, wo die Konsumwahl unbeschränkt ist. Es gilt nicht bei unvollständiger Konkurrenz, im Fall der Güterrationierung oder anderer (institutioneller) Beschränkungen der Konsumwahl.

Wir stützen uns hier auf den *Leontief*schen Lösungsweg des Problems, doch werden wir aus Gründen der engen Verwandtschaft der Lösungsverfahren auch weiterhin von dem *Leontief-Hicks*schen Theorem sprechen. In [13] ist schon auf einige Konsequenzen dieses Theorems hingewiesen worden, insbesondere ist gezeigt worden, daß das Theorem indextheoretisch mit dem Proportionalitätskriterium verträglich ist (*Wold* [39, S. 135]). Für unsere Zwecke ist die Tatsache wichtig, daß das *Leontief-Hicks*sche Theorem zur Begründung der homogenen Separabilität führt. Wir übernehmen dabei Definition 7 und Satz 4 aus [13].

Definition 7: Existiert ein Güteraggregat (Güterbündel) x_I ($I = A, B, \ldots, M$) mit der Eigenschaft $m_I\ (x_I) = m_1 x_{i1} + m_2 x_{i2} + \ldots + m_p x_{ip}$ ($p = \alpha, \beta, \ldots, \mu$), wobei m_I das gewogene arithmetische Mittel der $m_1, m_2, \ldots, m_p$ bildet, oder ein Preisaggregat p_I mit der Eigenschaft $n_I\,(p_I) = n_1 p_{i1} + n_2 p_{i2} + \ldots + n_p p_{ip}$, wobei n_I entsprechend den gewogenen Durchschnitt der $n_1, n_2, \ldots, n_p$ bildet, dann genügt die Aggregation von Gütern zu Güterbündeln den Kriterien von *Leontief* und *Hicks*.

Satz 4: Ist eine Aggregation von Gütern zu Güterbündeln nach dem *Leontief-Hicks*schen Theorem möglich, so existiert eine *homogen* separable Funktion $f(x)$. Es existieren homogene spezifische Funktionen $h_I\ (x_I)$ ($I = A, B, \ldots, M$), so daß $mh_I\,(x_I) = h_I\,(mx_{i1}, \ldots, mx_{ip})$. Dann ist $f(x)$ homogen separabel, wenn $f(x)$ die Darstellung $mf(x) = m\,(g\,(h_A\,(x_A), \ldots, h_M\ (x_M)) = g\,(mh_A\,(x_A), \ldots, mh_M\,(x_M)) = g\ (h_A\ (mx_{a1}, \ldots, mx_{a_\alpha}), \ldots, h_M\,(mx_{m1}, \ldots, mx_{m_\mu}))$ erlaubt.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich zunächst darauf, daß nach Satz 9 (Kap. 2) die Existenz einer separablen Funktion $f(x)$ gezeigt werden kann. Aus dem *Leontief-Hicks*schen Theorem folgt, daß bei Aggregation von elementaren Gütern zu Güterbündeln das indextheoretische Proportionalitätskriterium gilt. Das wiederum impliziert, daß die spezifischen Funktionen $h_I\,(x_I)$ homogen (vom Grade 1) sein müssen, so daß vermöge der Transformation g auch $f(x)$ diese Homogenitätseigenschaft besitzt.

Green [14, Kap. 4] zeigt, daß homogene Separabilität einige Eigenschaften aufweist, die die »Konsistenz« eines aus der separablen Funktion ableitbaren zweistufigen Budgetierungsprozesses (Kap. 4) sichern. (Dabei versteht *Green* unter »Konsistenz«, daß Güter und Preise nach dem *Leontief-Hicks*schen Theorem aggregiert sind.) *Gorman* [11] weist nach, daß bei solchen Funktionsklassen, wo mehrere (nicht alle) spezifische Funktionen homogen sind, diese zu einer übergeordneten Funktion (die homogen vom gleichen Grade wie die untergeordneten Funktionen sein muß) zusammengefaßt werden können. Diese Möglichkeit läßt sich auch aus Satz 4 erschließen.

Auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen homogener und additiver Separabilität müssen wir noch eingehen. *Strotz* [35] und ebenso *Gorman* [11] und *Green* [14, Kap. 3, 4] zeigen, daß die Maximierung einer separablen Funktion in indirekter Form $f^*(p, Y) = g^*(h^*_A(p_{a1}, \ldots, p_{a\alpha}; Y_A), \ldots, h^*_M(p_{m1}, \ldots, p_{m\mu}, Y_M))$ unter der Nebenbedingung der Budgetgleichung $Y = \sum_I Y_I$ zu der Gleichgewichtsbedingung

$$g^*_I \, \partial h^*_I / \partial Y_I = g^*_J \, \partial h^*_J / \partial Y_J = g^*_I \, h^{*I}_I = g^*_J \, h^{*J}_J$$

$$(g^*_I = \partial g^* / \partial h^*_I, g^*_J = \partial g^* / \partial h^*_J; h^{*I}_I = \partial h^*_I / \partial Y_I,$$

$$h^{*J}_J = \partial h^*_J / \partial Y_J, I, J = A, B, \ldots, M, I \neq J)$$

führt. Differenziert man diesen Ausdruck für $K = A, B, \ldots, M, I \neq J \neq K$ nach den entsprechenden Preisen p_{ki} und p_{kj} $(i, j = 1, \ldots, p, i \neq j, p = \alpha, \beta, \ldots, \mu)$, so erhält man nach einigen Umformungen die Differentialgleichung

$$(g^*_{KI} \, h^{*I}_I - g^*_{KJ} \, h^{*J}_J)(h^{*K}_{Kp_{ki}} \, h^{*K}_{p_{kj}} - h^{*K}_{p_{ki}} \, h^{*K}_{Kp_{kj}}) = 0.$$

(Es ist $g^*_{KI} = \partial^2 g^* / \partial h^*_K \partial h^*_I$ und für g^*_{KJ} entsprechend, $h^{*K}_{Kp_{ki}} = \partial^2 h^*_K / \partial Y_K \partial p_{ki}$ und für $h^{*K}_{Kp_{kj}}$ entsprechend, $h^{*K}_{p_{ki}} = \partial h^*_K / \partial p_{ki}$ und für $h^{*K}_{p_{kj}}$ entsprechend.)

Wir setzen aus Gründen der technischen Vereinfachung die beiden in der Klammer der obigen Differentialgleichung stehenden Ausdrücke gleich $(A)(B) = 0$. Es genügt, daß ein Faktor der Differentialgleichung Null wird (d. h. wenn (A) oder (B) Null wird), um den gesamten Ausdruck Null werden zu lassen. Wenn der Ausdruck (B) Null wird, kann bewiesen werden (*Strotz* [35, S. 483, Fußn. 3]), daß alle spezifischen Funktionen, die dieser Bedingung genügen, homogen sind. Wenn dagegen der Ausdruck (A) verschwindet, liegt starke (additive) Separabilität (bei mehr als zwei Gütergruppen) vor. Somit kann der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 5: In einer separablen Funktion sind homogene und starke (additive) Separabilität miteinander verträglich, in dem Sinne, daß man bei Nichterfüllung der einen Form die andere erwarten kann, und zwar nach folgender Regel:

(a) Ist $(B) = 0$ und $(A) \neq 0$, so ist $f(x)$ homogen separabel.

(b) Ist $(A) = 0$ und $(B) \neq 0$, so ist $f(x)$ stark (additiv) separabel.

(c) Ist $(A) = 0$ und $(B) = 0$, so ist $f(x)$ homogen und stark (additiv) separabel. (Diese Form ist ohne nähere Ableitung in [13] gegeben worden.)

(d) Ist für einige I $(A) = 0$ und für einige K $(B) = 0$ $(I \neq K)$, so ist $f(x)$ für I stark (additiv) separabel und für K homogen separabel, also ist $f(x)$ gemischt homogen-additiv separabel.

2. Funktionale Separabilität und Zeitpräferenzen

Die bisherigen Überlegungen und Ableitungen bezogen sich auf separable Nutzenfunktionen, die für einen bestimmten Zeitpunkt oder für eine zeitlich-homogene Konsumperiode gelten. Das heißt: sämtliche Güter bzw. Güterbündel sind in einem Zeitpunkt (Zeitraum) verfügbar und jeder Konsument trifft seine Entscheidung gemäß der in diesem Zeitpunkt (Zeitraum) geltenden Präferenzordnung. Nehmen wir nun an, der Konsument habe eine intertemporale Präferenzstruktur und stelle einen langfristigen Konsumplan mit endlichem Zeithorizont auf. Er ordne seine Konsumwünsche nach seiner Zeitpräferenz und den gegebenen und erwarteten finanziellen Möglichkeiten. Die Frage entsteht dann: welche neuen Überlegungen ergeben sich daraus für eine Theorie der funktionalen Separabilität? Wir glauben, daß der beste Lösungsweg bei der Einführung von Zeitpräferenzen in diese Theorie darin besteht, den bisher verwendeten geordneten topologischen Präferenzraum in einem –wörtlich genommen – weiteren Sinne zu verstehen, nämlich als einen um den endlichen Zeithorizont erweiterten Raum, als topologischen Produktraum. Bedeutsam ist, daß die Grundeigenschaften dieses Raumes – Abgeschlossenheit und Kompaktheit – auch nach der Produktbildung erhalten bleiben.

Statt der gewöhnlichen hier benutzten marginalen Präferenzrate wird man von einer intertemporalen marginalen Präferenzrate sprechen können und der Separabilitätsbegriff wird sich dann auf die Existenz intertemporaler Gütergruppen beziehen. Unsere Überlegungen gehen von der Produkttopologie $\chi = \bigtimes_{t=1}^{T} X^t = X^1 \times X^2 \times \ldots \times X^T$ aus, wo die hochgestellten Indizes die Zeitfolge kennzeichnen, auf die sich die topologischen Räume beziehen. Die in die Produkttopologie eingehenden topologischen Räume weisen die in Kapitel 2 beschriebenen Eigenschaften auf, insbesondere umfaßt der Produktraum auch alle vollständig geordneten Umgebungen, die in den einzelnen topologischen Räumen enthalten sind. Wir definieren einen endlichen Nutzenstrom auf dem topologischen Produktraum mit $\bar{u} = \varphi(\bar{x}) = (u^1, u^2, \ldots, u^T)$, wo $u^1, u^2, \ldots, u^T$ eine Folge von Nutzenfunktionen auf den einzelnen topologischen Räumen bezeichnet, deren Existenz nach Kapitel 2 gesichert sein soll. Da der Konsument (oder allgemein die Entscheidungseinheit) Entscheidungen über mehrere (aber endlich viele) Perioden trifft, sein Entscheidungsbereich also auf einen endlichen Zeithorizont beschränkt ist, müssen neben den in Kapitel 2 gegebenen Postulaten (den statischen Postulaten) zusätzliche Postulate über das zeitbezogene Verhalten des Konsumenten getroffen

werden. Solche die Zeitpräferenz betreffende Postulate wollen wir jetzt einführen:

(1*) Wenn $x^1{}_A \gtrsim x^2{}_B$ und $x^2{}_B \gtrsim x^3{}_C$, dann ist $x^1{}_A \gtrsim x^3{}_C$ (intertemporale Transitivität).

(2*) Wenn $x^1{}_A \gtrsim x^2{}_B$ und $x^2{}_B \gtrsim x^1{}_A$, dann ist $x^1{}_A \sim x^2{}_B$ (intertemporale Antisymmetrie).

(3*) Wenn $x^1{}_A \gtrsim x^2{}_B$ und $x^2{}_B \gtrsim x^3{}_C$, dann gibt es ein t mit $1 < t < 3$, so daß $x^t{}_A \sim x^2{}_B$ für $1 < t < 2$ und $x^t{}_B \sim x^3{}_C$ für $2 < t < 3$ (Stetigkeit der intertemporalen Präferenzordnung).

(4*) Wenn $x^1{}_A \gtrsim x^2{}_B$, so ist für $0 < t < 1$ $tx^1{}_A + (1 - t)\, x^2{}_B \gtrsim x^2{}_B$ (Konvexität der intertemporalen Präferenzordnung).

(5*) $x^1{}_A \gtrsim x^t{}_A$ dann und nur dann, wenn $t > 1$ ($t = 2, \ldots, T$) (Monotonie der Zeitpräferenz).

Postulate über intertemporale Präferenzordnungen sind von *Koopmans* [19] und *Lancaster* [22] gegeben worden. (1*), (3*), (5*) haben wir von *Lancaster* übernommen. *Koopmans* fordert zusätzlich Sensitivität und Stationärität, zwei Postulate, die für seine Zwecke notwendig sind.

Für die Postulierung von zeitbezogenen Präferenzstrukturen scheint allgemein die Vorstellung realistisch zu sein, daß der Konsument, wenn zwei (beliebige) Güterbündel zu verschiedenen Zeitpunkten verfügbar sind, dasjenige vorzuziehen gewillt ist, das ihm zeitlich am nächsten steht oder daß er gegenüber Güterbündeln, die ihm im gegenwärtigen Zeitpunkt (oder Zeitraum) weniger dringlich erscheinen, eine geringere Zeitpräferenz besitzt und deshalb andere Güterbündel diesen vorzieht.

Nach diesen Vereinbarungen kehren wir zurück zu unserem eigentlichen Anliegen.

Definition 7: $x^t \in X^t \subset \chi$ durchlaufe für $t = 1, \ldots, T$ alle möglichen Werte. Ein Nutzenstrom ist definiert als Funktion $\varphi(\bar{x}) = (f(x^1), f(x^2), \ldots, f(x^T))$ auf χ.

Um die Existenz eines Nutzenstromes auf dem topologischen Produktraum nachzuweisen, benutzen wir den folgenden Satz, der von einigen in Satz 9 (Kap. 2) genannten Tatsachen ausgeht.

Satz 6: Es sei $\chi = \overset{T}{\underset{t=1}{X}} X^t$ ein topologischer Produktraum. Für eine Abbildung dieses Raumes $\Phi: \chi \to R$ existieren Abbildungen $\Psi: X^t \to R$ für alle $t = 1, \ldots, T$, so daß für jedes t in Verbindung mit Satz 9 der Nutzenstrom in der Form $\varphi(\bar{x}) = \psi(g^1(x^1{}_A, x^1{}_B, \ldots, x^1{}_M), \ldots, g^T(x^T{}_A, x^T{}_B, \ldots, x^T{}_M)$ darstellbar ist.

Wir haben nur zu zeigen, welchen Sinn die Abbildung $\Psi: X^t \to R$ in Satz 6 hat. Alles weitere, insbesondere die Existenz einer Transformation g, folgt aus Satz 9. Das kartesische Produkt ist hier definiert als die Menge der geordneten T-tupel $(x^1, x^2, \ldots, x^T) \in \chi$, denn es ist $x^1 \in X^1$, $x^2 \in X^2$, $\ldots, x^T \in X^T$ und – wie schon bekannt – $\overset{T}{\underset{t=1}{X}} X^t = \chi$. Weiterhin folgt aus $X^t \subset \chi$, daß für ein bestimmtes t die Abbildungsmenge von X^t

als echte Teilmenge in der Abbildungsmenge von χ enthalten ist, $\Psi(X^t) \subset \Phi(\chi)$. Für alle t schreiben wir demnach $\Phi(\chi) = \Psi(X^1, X^2, \ldots, X^T)$.

Satz 7 (schwache Separabilität bei Geltung von Zeitpräferenzen): $\varphi(\bar{x})$ ist in bezug auf den topologischen Produktraum χ schwach separabel, wenn gilt:

(a) für alle $x_i \in I^{tr}$, $x_j \in J^{tr}$ gibt es $x_k \in K^t$, so daß ${}_{ij}R''_k = 0$ impliziert ${}_{IJ}R''_K = 0$. ($I, J, K = A, B, \ldots, M, I \neq J \neq K, t_r \neq t, t > t_r$.)

(b) $\varphi(\bar{x})$ erlaubt die allgemeine Darstellung als separable Funktion $\varphi(\bar{x}) = \psi\{g^{tr}(h_I(x_I), h_J(x_J)), g^t(h_K(x_K))\}$.

Anschaulich läßt sich der in Satz 7 ausgedrückte Gedanke so verdeutlichen: Die Tatsache, daß ich *morgen* (am y-ten Tag, Monat, Jahr) ein k-tes Gut aus der K-Gruppe wählen werde, berührt nicht meine marginale Präferenzrate zwischen dem *heute* (am x-ten Tag, Monat, Jahr) verfügbaren i-ten Gut aus der I-Gruppe und dem (zum gleichen Zeitpunkt oder Zeitraum verfügbaren) j-ten Gut aus der J-Gruppe.

Der Beweis für Satz 7 läßt sich entsprechend dem Beweis von Satz 1 aus dem Gedanken ableiten, daß die marginale Präferenzrate zwischen x_i und x_j nur eine Funktion der Güter in I und J ist. I und J sind wohlbekannte Teilmengen des topologischen Raumes X^{tr}, K ist Teilmenge von X^t. Satz 9 (Kap. I) beweist die Existenz einer Transformation g auf X und Satz 6 beweist schließlich die Existenz einer Transformation ψ auf dem Produktraum.

Somit ist nach dem Vorstehenden und Satz 7 klar, daß ein schwach separabler Nutzenstrom in der beschriebenen Form auf einem topologischen Produktraum existiert.

Wir geben jetzt noch eine Eigenschaft des separablen Nutzenstromes an, die sich im Vergleich zu Satz 7 als restriktiver herausstellen wird.

Satz 8 (starke Separabilität bei Geltung von Zeitpräferenzen): $\varphi(\bar{x})$ ist in bezug auf χ stark (additiv) separabel, wenn gilt:

(a) für alle $x_i \in I^{tr}$, $x_j \in J^{ts}$, $x_k \in K^t$: ${}_{ij}R''_k = 0$ impliziert ${}_{IJ}R''_K = 0$. ($I, J, K = A, B, \ldots, M, I \neq J \neq K, t_r \neq t_s \neq t, t_r < t_s < t$)

(b) $\varphi(\bar{x})$ erlaubt die Darstellung in der additiven Form $\varphi(\bar{x}) = \psi\{g^{tr}(h_I(x_I)) + g^{ts}(h_J(x_J)) + g^t(h_K(x_K))\}$.

In Satz 8 wird es sinnvoll, von marginaler Zeitpräferenzrate zu sprechen, da sich dieser Begriff auf verschiedene Zeitpunkte (Zeiträume) bezieht. (Nebenbei sei bemerkt, daß es mit Hilfe des Begriffes der marginalen Zeitpräferenzrate gelingen kann, die auf den Nutzenstrom bezogene Diskontrate befriedigend zu definieren.)

Es kann gezeigt werden, daß in Satz 8 dem Postulat der Unabhängigkeit genügt wird. Der weitergehende Schluß, daß (a) (b) impliziert, beruht auf einer entsprechend in Satz 2 verwendeten Argumentation und stützt sich somit auch auf die Gültigkeit von Satz 9 (Kap. 2) und Satz 6.

Der hier im Zusammenhang mit der Existenz eines Nutzenstroms verwendete Begriff der Unabhängigkeit kann am treffendsten als Periodenunabhängigkeit gedeutet werden. Der Nutzenstrom in der Form von Satz 8 (b) läßt sich im weitesten Sinne als eine Spezifizierung und Verschärfung von *Koopmans'* [19, S. 292f.] über Zeitperioden *aggregierter* Nutzenfunktion betrachten.

Bemerkenswert ist, daß *Koopmans'* aggregierte Nutzenfunktion (der inhaltlichen Aussage nach) auch verwandt ist mit dem aus Satz 7 bekannten schwach separablen Nutzenstrom. Der Begriff des Nutzenstroms (bei unendlichem Zeithorizont) als einer Folge von zeitbezogenen Nutzenfunktionen geht auf *Diamond* [6] zurück, ebenso der Gedanke, daß man für den Nachweis der Existenz eines solchen Nutzenstroms die Produktmetrik (Produkttopologie) einführen muß. Dieser Gedanke ist dann systematisch in einer gemeinsamen Arbeit von *Koopmans*, *Diamond*, *Williamson* [20] weitergeführt worden.

Sowohl die Studie von *Koopmans* [19] als auch die nach Thematik und Inhalt verwandte Studie von *Diamond* [6] haben sich das anspruchsvolle Ziel gesetzt, aus der Konstruktion einer intertemporalen Präferenzordnung einen Nutzenstrom abzuleiten, für den der Nachweis eines »Befriedigungsdranges« (»impatience«) im *Böhm-Bawerk*schen Sinne gelingt. *Koopmans*, *Diamond*, *Williamson* [20] zeigen darüber hinaus, daß eine empirisch weniger auffallende Eigenschaft als die des Befriedigungsdranges aus der intertemporalen Präferenzordnung abgeleitet werden kann, und zwar die »Zeitperspektive« (»time perspective«), doch ist der Nachweis dieser Eigenschaft mit der Annahme intertemporaler Nutzendifferenzen verbunden, die zu einer weiteren Klasse als der der linearen Transformationen des Nutzenindex führen.

Es ist besonders bemerkenswert, daß wir auf dem Wege der Ableitung eines separablen Nutzenstroms zu Resultaten gelangen, die auf der Linie von *Koopmans'* Untersuchung [19] liegen, obwohl *Koopmans* andere Untersuchungsziele verfolgt und nicht von der separablen Nutzenfunktion ausgeht.

Wir wollen dies durch ein einfaches Beispiel beleuchten, indem wir annehmen, der im Zeitpunkt (Zeitraum) t_r bestehende Präferenzraum X^{tr} enthalte die beiden Güterbündel $x^{tr}{}_I$ und $x^{tr}{}_J$, wogegen $x^t{}_K$ für alle im Zeitpunkt (Zeitraum) t $(t > t_r)$ verfügbaren, im Präferenzraum X^t enthaltenen Güterbündel stehen möge. Dann bedeutet die Anwendung der intertemporal schwachen Separabilität, daß künftige Konsumaussichten nicht zu einer Veränderung der Präferenzstruktur bei gegenwärtigen Konsumaussichten führen. Dieses Ergebnis ist vereinbar mit *Koopmans'* Untersuchung.

Unserer Meinung nach führen solche intertemporalen Nutzenfunktionen in vielen Fällen (vor allem in einer Wohlstandsgesellschaft) zu plausiblen Verhaltensregeln im engeren Rahmen einer mikroökonomischen Theorie des Haushalts und im weiteren Rahmen einer mikroökonomischen Entscheidungstheorie. Eine erst jüngst erschienene Studie von *Thompson* [36] zeigt, wie man aus intertemporalen Nutzenfunktionen langfristige Konsumfunktionen gewinnen kann. Hiermit rückt die Theo-

rie der intertemporalen Nutzenfunktion in die Nähe empirischer Verwendbarkeit und Nachprüfbarkeit.

Freilich läßt eine solche deterministische Behandlung von Zeitpräferenzen auch ihre methodischen Grenzen erkennen. So lassen sich die Konsumentenpräferenzen bezüglich zukünftiger Konsumaussichten nicht sicher voraussehen. In solchen Situationen werden stochastische Überlegungen eine vielversprechende Rolle spielen. Doch liegen, wie schon betont, diese Betrachtungen außerhalb der vorliegenden Untersuchung.

Wir werden den Budgetierungsprozeß, wie er sich aus den Eigenschaften separabler Nutzenströme ableiten läßt, im nächsten Kapitel außer Betracht lassen und uns nur auf den für die statische Theorie gültigen stützen, dessen theoretische Grundlage wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels behandelt haben. Dieses Vorgehen läßt sich mit dem Argument rechtfertigen, daß die wesentlichen Eigenschaften der funktionalen Separabilität, wie sie für die (statische) Mikrotheorie entwickelt worden sind, auch dann erhalten bleiben, wenn in diese Theorie Zeitpräferenzen eingeführt werden.

Summary

This paper is concerned with a general mathematical foundation of the concept and theory of functional separability with respect to utility functions. For this purpose we postulate a suitable preference ordering on a topological space which should be a *Hausdorff* space. Results on ordered topological (preference) spaces are obtained. Some rather restrictive assumptions such as compactness will be necessary to state two existence theorems on derived utility functions.

The concept of functional separability is formulated in terms of differential order relations on a compact *Hausdorff* space. Some definitions of and theorems on weak, strong and *»Pearce«* separability are given.

There is also an extension of the static theory in postulating an intertemporal preference ordering on a topological *(Hausdorff)* product space.

Literatur

[1] *R. J. Aumann,* Utility Theory without the Completeness Axiom, Econometrica 30, 1962.

[2] *R. J. Aumann,* Subjective Programming, Kap. 12, in: Human Judgements and Optimality (*M. W. Shelly, G. L. Bryan,* Hrsg.). New York 1964.

[3] *G. Birkhoff,* Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquium Publications 25, 1948.

[4] *G. Debreu,* Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, Kap. 11, in: Decision Processes (*R. M. Thrall, C. H. Coombs, R. L. Davis,* Hrsg.). New York 1954.

[5] *G. Debreu,* Theory of Value, Cowles Foundation for Research in Economics (Monogr. 17). New York 1959.

[6] *P. A. Diamond,* The Evaluation of Infinite Utility Streams, Econometrica 33, 1965.

[7] *S. Eilenberg,* Ordered Topological Spaces, American Journal of Mathematics 63, 1941.

[8] *W. Franz,* Topologie I (Allgemeine Topologie), Sammlung Göschen Bd. 1181. Berlin 1960.

[9] *R. Frisch,* A Complete Scheme for Computing all Direct and Cross Elasticities in a Model with many Sectors, Econometrica 27, 1959.

[10] *S. M. Goldman* und *H. Uzawa,* A Note on Separability in Demand Analysis, Econometrica 32, 1964.

[11] *W. M. Gorman,* Separable Utility and Aggregation, Econometrica 27, 1959.

[12] *H.-W. Gottinger,* Einige Bemerkungen zur Hypothese des neutralen Bedarfs, Jahrbuch für Sozialwissenschaft 17(3), 1966.

[13] *H.-W. Gottinger,* Funktionale Separabilität bei Nutzenfunktionen, Jahrbuch für Sozialwissenschaft 19(2), 1968.

[14] *H. A. J. Green,* Aggregation in Economic Analysis, Princeton 1964.

[15] *F. Hausdorff,* Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl., Leipzig 1914, Nachdruck New York 1949.

[16] *J. R. Hicks* und *R. G. D. Allen,* A Reconsideration of the Theory of Value, Economica 1, 1934.

[17] *J. R. Hicks,* Value and Capital, 2. Aufl., Oxford 1946.

[18] *Y. Kannai,* Existence of a Utility in Infinite Dimensional Partially Ordered Spaces, Israel Journal of Mathematics 1, 1963.

[19] *T. C. Koopmans,* Stationary Ordinal Utility and Impatience, Econometrica 28, 1960.

[20] *T. C. Koopmans, P. A. Diamond, R. E. Williamson,* Stationary Utility and Time Perspective, Econometrica 32, 1964.

[21] *K. Kuratowski,* Introduction to Set Theory and Topology, Reading (Mass.) 1962.

[22] *K. Lancaster,* An Axiomatic Theory of Consumer Time Preference, International Economic Review 4, 1963.

[23] *W. W. Leontief,* Composite Commodities and the Problem of Index Numbers, Econometrica 4, 1936.

[24] *W. W. Leontief,* A Note on the Interrelation of Subsets of Independent Variables of a Continuous Function with Continuous First Derivatives, Bulletin of the American Mathematical Society 53, 1947.

[25] *W. W. Leontief,* Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships, Econometrica 15, 1947.

[26] *L. Nachbin,* Topology and Order, Van Nostrand Mathematical Studies No. 4, New York 1965.

[27] *A. Nataf,* Sur la possibilité de construction de certains macromodèles, Econometrica 16, 1948.

[28] *J. F. Pearce,* An Exact Method of Consumer Demand Analysis, Econometrica 29, 1961.

[29] *J. F. Pearce,* A Contribution to Demand Analysis, Oxford 1964.

[30] *V. Rajaoja,* A Study in the Theory of Demand Functions and Price Indexes, Commentationes Physico-Mathematicae 21(1), Kopenhagen 1958.

[31] *A. P. Robertson* und *W. J. Robertson,* Topological Vector Spaces, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Cambridge 1964.

[32] *H. Schubert,* Topologie. Stuttgart 1964.

[33] *M. Sono,* The Effect of Price Changes on the Demand and Supply of Separable Goods, International Economic Review 2, 1961.

[34] *R. H. Strotz,* The Empirical Implications of a Utility Tree, Econometrica 25, 1957.

[35] *R. H. Strotz,* The Utility Tree: a Correction and further Appraisal, Econometrica 27, 1959.

[36] *E. A. Thompson,* Intertemporal Utility Functions and the Long-Run Consumption Function, Econometrica 35, 1967.

[37] *L. E. Ward,* Partially Ordered Topological Spaces, Proceedings of the American Mathematical Society 5, 1954.

[38] *A. J. White,* Real Analysis. Reading (Mass.) 1968.

[39] *H. Wold,* (in Verbindung mit *L. Jureen*), Demand Analysis, A Study in Econometrics. New York 1953.

Beiträge zur funktionalen Separabilität bei Nutzenfunktionen

(Teil II)

von

HANS-WERNER GOTTINGER

München

Vorbemerkung

Während im ersten Teil dieser Arbeit (vgl. »Beiträge zur funktionalen Separabilität bei Nutzenfunktionen (Teil I)«, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 125, 3.Heft, Juli 1969) versucht worden ist, sowohl die mathematischen Grundlagen als auch die Theorie der funktionalen Separabilität bei Nutzenfunktionen darzustellen, wird die funktionale Separabilität jetzt im Rahmen der Mikronachfragetheorie und im Zusammenhang mit linearökonomischen Ansätzen in der Nutzentheorie behandelt.

III. Funktionale Separabilität und Mikronachfragetheorie

Wir werden in diesem Kapitel nur Gedanken verfolgen, die den Zusammenhang zwischen funktionaler Separabilität und statischer Mikronachfragetheorie betreffen. Es wird sich dann zeigen, daß separable Nutzenfunktionen einige Aufschlüsse über Mikroentscheidungen und Mikroallokationen des Konsumenten oder Haushalts vermitteln. Davon wird im ersten Abschnitt die Rede sein. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mehr mit der Frage, wie sich der Budgetierungsprozeß des Konsumenten oder Haushalts als mehrstufiger Entscheidungsprozeß beschreiben läßt, wenn Preise und Einkommen als Entscheidungsdeterminanten gegeben sind. Schließlich werden noch einige empirische Aspekte des Budgetierungsprozesses beleuchtet.

1. Einige Sätze über Mikroallokation

Die traditionelle Theorie des Konsumentenverhaltens war bestrebt, mit der Maximierung der Nutzenfunktion unter der Nebenbedingung der

Budgetbeschränkung (Lagrangesche Maximierung) eine Theorie der Mikroallokation zu entwickeln. Der Kern dieser Theorie besteht in dem Nachweis der Existenz eines Konsumentengleichgewichts.

Auch die Theorie der funktionalen Separabilität will eine Allokationstheorie bieten. Diese ist geeignet, den Entscheidungsprozeß des Konsumenten oder Haushalts über mehrere Stufen zu beschreiben. Ein solcher Ansatz folgt aus der Funktionsstruktur einer separablen Nutzenfunktion. Diese Funktionsstruktur kann graphisch durch ein Baumdiagramm in der Art eines »Utility Tree« (*Strotz* [17]) oder »Inverted Tree« (*Leontief* [10]) dargestellt werden. Das ist ein vertikales Strukturdiagramm (wie es in der Theorie der endlichen Graphen verwendet wird), das als formales Spiegelbild des mikroökonomischen Entscheidungsprozesses dienen kann. Zunächst wollen wir an eine Eigenschaft der Separabilität anknüpfen, die mit der hier definierten Bedarfshomogenität und der Unabhängigkeitshypothese ökonomisch begründet werden kann: das ist der Satz über die proportionale Verteilung der Ausgaben (des Budgets) auf die einzelnen Gütergruppen. Bevor wir diesen Satz anführen, übernehmen wir von *Strotz* [17, S. 272] ein heuristisches Argument, das den Grundgedanken dieses Satzes leicht verständlich macht.

Angenommen, es gibt zwei Gütergruppen I und J, die jeweils zwei Güter als Elemente enthalten: $x_{i'}, x_{i''} \in I$, $x_{j'}, x_{j''} \in J$. Die Nutzenvorstellung des Konsumenten finde ihren Niederschlag in der separablen Nutzenfunktion $f(x) = g(h_I(x_{i'}, x_{i''}), h_J(x_{j'}, x_{j''}))$. Das folgende Problem entsteht dann: Welche plausiblen Hypothesen kann man über das Nachfrageverhalten des Konsumenten aufstellen, wenn auf ihn eine solche separable Nutzenfunktion zutrifft?

Zur Lösung des Problems ist es zweckmäßig, das Verhalten des Konsumenten nach dem Grad der möglichen Nachfragewirkungen zu klassifizieren. Eine Veränderung der Nachfragestruktur (in bezug auf $x_{j'}, x_{j''}$) kann dann erwartet werden,

(a) wenn sich die Preise $p_{j'}, p_{j''}$ bei Konstanz des für J verwendeten Einkommens Y_J (= Konsumausgaben) verändern,

(b) wenn – durch eine Präferenzänderung bedingt – das für J verwendete Einkommen Y_J bei Konstanz der Preise $p_{j'}, p_{j''}$ sich verändert,

(c) wenn die Preise $p_{i'}, p_{i''}$ sich verändern und zu einer Änderung des für J verwendeten Einkommens Y_J führen,

(d) wenn durch eine Veränderung des Gesamteinkommens Y eine Reallokation der Gruppenausgaben stattfindet.

Die Wirkungen unter (a) und (b) können als *intern* bezeichnet werden, diejenigen unter (c) und (d) als *extern*.

Die internen Wirkungen lassen sich durch die traditionelle Theorie erfassen. Hier wollen wir erklären, wie die externen Wirkungen aus der Struktur einer separablen Nutzenfunktion abgeleitet werden können. Das Hauptargument wird sein, daß die Veränderung der Preise $p_{i'}, p_{i''}$ im gleichen Maß wie die Veränderung des Gesamteinkommens Y auf die Nachfrage von $x_{j'}, x_{j''}$ proportional wirken wird.

Satz 1 (Proportionalitätssatz von Strotz [17]): Für die separable Nutzenfunktion $f(x) = g(h_I(x_{i'}, x_{i''}), h_J(x_{j'}, x_{j''}))$ erlauben die Nachfragetangenten von $x_{j'}, x_{j''}$ die Darstellung

$$(1) \qquad x_{j'} = \alpha_{j',o} + \sum_j \alpha_{j',j} p_j + \sum_i \alpha_{i',i} p_i + \alpha_{j',Y}\, Y$$

$$(2) \qquad x_{j''} = \alpha_{j'',o} + \sum_j \alpha_{j'',j} p_j + \sum_i \alpha_{j'',i} p_i + \alpha_{j'',Y}\, Y.$$

($\alpha_{j',o}, \alpha_{j'',o}$ sind bestimmte zu ermittelnde Parameter; $\alpha_{j',j} = \partial x_{j'}/\partial p_j$, $\alpha_{j'',j} = \partial x_{j''}/\partial p_j$ bzw. $\alpha_{j',i} = \partial x_{j'}/\partial p_i$, $\alpha_{j'',i} = \partial x_{j''}/\partial p_i$ bezeichnen partielle direkte bzw. indirekte Ableitungen nach den entsprechenden Preisen; $\alpha_{j',Y} = \partial x_{j'}/\partial Y$, $\alpha_{j'',Y} = \partial x_{j''}/\partial Y$ sind die partiellen Ableitungen nach dem Gesamteinkommen; $i = i', i''$, $j = j', j''$.)

Dann genügen $x_{j'}, x_{j''}$ der Proportionalitätsbedingung

$$(3) \qquad \alpha_{j',i'}/\alpha_{j'',i'} = \alpha_{j',i''}/\alpha_{j'',i''} = \alpha_{j',i}/\alpha_{j'',i} = \alpha_{j',Y}/\alpha_{j'',Y}.$$

Satz 1 ist (in dieser Form) zuerst von *Strotz* [17, S. 272] gesehen und bewiesen worden. Es stellt sich heraus, daß er inhaltlich gleichwertig ist mit *Sono*s Gesetz der Proportionalität [16, 2.5, 3.8], obgleich *Sono* einen anderen Ansatz bevorzugt und eine andere Technik zur Lösung des Problems verwendet hat. Wie bereits erwähnt worden ist, hat *Strotz* [17], im Gegensatz zu [18], noch nicht zwischen starker (additiver) und schwacher Separabilität unterschieden. Obwohl er jedoch diesen Satz aus Eigenschaften der schwachen Separabilität abgeleitet hat, kann beweistechnisch verdeutlicht werden [18], daß er auch bei starker (additiver) Separabilität Gültigkeit besitzt.

Wir skizzieren einen Beweis für diesen Satz, indem wir im wesentlichen *Strotz* [17] folgen. (Für weitere beweistechnische Einzelheiten verweisen wir auf diese Arbeit.) Zunächst verdeutlichen wir uns, daß die Lagrangesche Maximierung einer separablen Funktion in mehrere solche Maximierungsprobleme der spezifischen Funktionen zerfällt. Sind erst einmal die Ausgabenquoten für die einzelnen Gütergruppen fest vorgegeben, so lassen sich die Submaximierungsprobleme in entsprechender Weise lösen. Nach der Definition der schwachen Separabilität ist aber bekannt (Kap. II, Abschn. 1), daß die marginale Präferenzrate zwischen $x_{j'}$ und $x_{j''}$ in J nur eine Funktion dieser Variablen sein kann. Berücksichtigen wir dies als nähere Erläuterung zu Satz 1, so fällt die Einsicht nicht schwer, daß für eine beliebig kleine Nachfrageänderung die Beziehung gilt:

$$(4) \qquad dx_j = \sum_j (\partial x_j/\partial p_j)\, dp_j + (\partial x_j/\partial Y_J)\, dY_J \qquad (Y_I, p_i = \text{const}).$$

$$= \sum_j \alpha_{j,j} dp_j + \alpha_{j,Y_J} dY_J$$

für beliebige $x_j \in J$.

In Worten: Die Veränderung der Nachfrage nach dem j-ten Gut ist nur abhängig von der Summe der Veränderung der j-ten Preise und der Veränderung des für die Gruppe J verwendeten Einkommens Y_J (Konstanz von Y_I und aller anderen Preise p_i vorausgesetzt). Ist Y_J in der Form der Nebenbedingung bei der Maximierung der spezifischen Funktion h_J

fest vorgegeben, so ist die nachgefragte Menge der Güter einer Gruppe J nur eine Funktion der Preise der gleichen Gruppe p_j. Nehmen wir nun aber an, es finde eine Reallokation der Gruppenausgaben statt, so haben wir zu erklären, wodurch eine solche Reallokation verursacht wird. Bei Konstanz der Preise p_j führt jede Preisveränderung von p_i über eine Neubewertung der spezifischen Nutzenfunktion h_I zu einer indirekt preisinduzierten Reallokation der Gruppenausgaben. So ergibt sich eine Verschiebung von Y_J als kombinierte Wirkung:

$$(5) \qquad dY_J = \sum_i (\partial Y_J/\partial p_i)\, dp_i + (\partial Y_J/\partial Y)\, dY$$
$$= \sum_i \beta_{Y_J,\, i}\, dp_i + \beta_{Y_J,\, Y}\, dY.$$

Nach Einsetzen in (4) erhält man für Veränderungen von x_j den Ausdruck:

$$(6) \qquad dx_j = \sum_j \alpha_{j,\, j} dp_j + \sum_i \alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i} dp_i + \alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, Y}\, dY.$$

In Worten: Die Veränderung der Nachfrage nach x_j ist nicht nur direkt abhängig von einer Veränderung der Preise p_j, sondern auch – über die durch Reallokation bedingte Änderung von Y_J – indirekt abhängig von der Veränderung der Preise p_i und der Veränderung des Gesamteinkommens Y. Die Nachfragetangente nimmt dann eine zu (1) kongruente Gestalt an:

$$(1^*) \qquad x_j = \alpha_{j,\, o} + \sum_j \alpha_{j,\, j} p_j + \sum_i \alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i} p_i + \alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, Y}\, Y.$$

Entsprechend gilt dann auch für (1*) die Proportionalitätsbedingung

$$(3^*) \qquad \alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i'}/\alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i''} = \alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i''}/\alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i'''} =$$
$$\alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i}/\alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, i} = \alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, Y}/\alpha_{j,\, Y_J}\, \beta_{Y_J,\, Y},$$

die die Proportionalitätsbedingung in Satz 1 bestätigt.

Wenn wir uns verdeutlichen, daß Preisveränderungen in der Gruppe I nach (6) zu Nachfrageveränderungen in der Gruppe J über eine Reallokation der Gruppenausgaben führen, so sind solche durch indirekte Preiseffekte verursachte Reallokationsverschiebungen der Gruppenausgaben motiviert durch simultane Veränderungen in den Grenznutzen der Gruppenausgaben. Das läßt sich dann einsehen, wenn man wie *Strotz* [17, S. 275] eine separable Funktion in indirekter Form benutzt, in die Preise und Gruppenausgaben als Variable eingehen. Der folgende Satz ist eine Konsequenz von Satz 1 und der vorstehenden Überlegungen.

Satz 2: Bei Geltung einer stark (additiv) oder ersatzweise einer homogen separablen Nutzenfunktion bewirkt die Veränderung der Preise $p_{i'}$, $p_{i''}$ eine Reallokation der Gruppenausgaben in der Weise, daß die Gleichung

$$(7) \qquad \beta_{Y_I,\, i'}/\beta_{Y_I,\, i''} = \beta_{Y_J,\, i'}/\beta_{Y_J,\, i''} = \beta_{Y_K,\, i'}/\beta_{Y_K,\, i''} \quad (I \neq J \neq K)$$

erfüllt ist. Bei nur zwei Gütergruppen ist die schwache Separabilität für die Gültigkeit des Satzes notwendig und hinreichend.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf die Lagrangesche Maximierung einer separablen Funktion in indirekter Form. Für den Beweis genügt es zu zeigen, daß die Differentialgleichung von S. 430 verschwindet. *Strotz* [18, S. 484] zeigt, daß diese Bedingung für die starke (additive) Separabilität immer erfüllt ist, wenn im (Gleichgewichts-) Optimum $g^*_I h^{*I} = g^*_J h^{*J}$ gilt ($I, J = A, B, \ldots, M$; $I \neq J$). Die folgende verbale Interpretation ist Satz 2 angemessen: Im Optimum gilt die Forderung, daß das Gesamteinkommen des Konsumenten auf die einzelnen Gütergruppen so verteilt werden sollte, daß der Grenznutzen jeder zusätzlich verwendeten Geldeinheit für alle Gütergruppen der gleiche ist.

2. Der Budgetierungsprozeß und die Allokation der Konsumausgaben

Im ersten Abschnitt kündigt sich bereits ein Budgetierungsprozeß an, mit dessen Hilfe es gelingen kann, aus separablen Nutzenfunktionen empirisch einleuchtende Allokationsprogramme zu entwickeln. Es wird sich außerdem zeigen, daß das Dualitätsverhältnis zwischen direkter und indirekter Funktion* auch für direkt und indirekt separable Funktionen zur Erklärung des Budgetierungsprozesses herangezogen werden kann. Wir setzen voraus, daß der Konsument – wie auch jede andere Entscheidungseinheit – eine optimale Allokation seiner Konsumausgaben erstreben will. Preise und Einkommen mögen ausreichende Indikatoren für die Festlegung seines Konsumprogramms sein. Im einzelnen handelt es sich um die Beantwortung der Frage: Welche Entscheidungen muß dieser Konsument treffen, damit sein Gesamtbudget und jedes seiner Teilbudgets optimal genannt werden können? Zwei Stadien im Budgetierungsprozeß lassen sich unterscheiden:

(a) Der Konsument bestimmt in bezug auf seine Bedarfsziele geeignete Gütergruppen. Da seine Mittel zum Zwecke der Bedürfnisbefriedigung jedoch begrenzt sind, muß er danach trachten, sein verfügbares Geldeinkommen so zu verteilen, daß sein Gesamtnutzen unter der bekannten Budgetrestriktion ein maximaler ist. Jeder Gütergruppe ist ein geeigneter Preisindex zugeordnet, der als Kriterium dafür dient, wie die Konsumausgaben auf bestimmte Gruppen (optimal) zu verteilen sind. Damit ist das *Allokationsproblem erster Ordnung* verbal ausreichend gekennzeichnet.

(b) Auf der zweiten Stufe wird der Konsument zu entscheiden haben, welche monetären Beträge gemäß seiner Präferenzordnung auf die einzelnen Güter innerhalb der Gruppe fallen sollen. Eine optimale Bestimmung dieser Beträge wird dann erfolgt sein, wenn die spezifische Funktion unter der spezifischen Budgetrestriktion maximiert ist. In diesem Sinn kann man auch von einem *Allokationsproblem zweiter Ordnung* sprechen.

Der Budgetierungsprozeß nach Strotz [17]. Wir gehen von einer geeigneten Folge von Preisindizes aus:

$$P = P(p_I) = P(p_A, p_B, \ldots, p_M). \tag{8}$$

* Vgl. dazu H.-W. Gottinger, Die Existenz einiger Klassen deterministischer Nutzenfunktionen, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 183(2), 1969, S. 97–124.

Aus der indirekt separablen Nutzenfunktion leiten wir die Ausgabenfunktion für I ab:

$$(9) \qquad Y_I = Y_I(p_A, p_B, \ldots, p_M, Y) \quad (I = A, B, \ldots, M)$$

mit $Y = \sum_{I=1}^{M} Y_I$. In (9) haben die Preisindizes den Sinn, die monetäre Beanspruchung jedes Teilbudgets an das Gesamtbudget erkennbar zu machen.

Wir folgen der Analyse von *Strotz* [17] und beziehen uns (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) auf die Gütergruppen I, J, K ($I, J, K = A, B, \ldots, M$; $I \neq J \neq K$). Die Ausgabenfunktion für I schreiben wir dann:

$$(10) \qquad Y_I = Y_I(p_{i'}, p_{i''}, \ldots, p_{j'}, p_{j''}, \ldots, p_{k'}, p_{k''}, \ldots, Y).$$

(Entsprechend kann man (10) in bezug auf J, K schreiben.)

Die Frage entsteht, wann es zulässig ist, aus (10)

$$(11) \qquad Y_I = Y_I(p_I, p_J, p_K, Y)$$

abzuleiten.

Um geeignete Preisindizes zu finden, definieren wir für I (für J, K entsprechend):

$$(12) \qquad p_I = w_{i'} p_{i'} + w_{i''} p_{i''} + \ldots .$$

Strotz [17, S. 278] beantwortet diese Frage, indem er zeigt, daß als hinreichende Bedingung

$$(13) \qquad \frac{\beta_{Y_I, i'}}{\beta_{Y_I, i''}} = \frac{\beta_{Y_I, I}\, \gamma_{I, i'}}{\beta_{Y_I, I}\, \gamma_{I, i''}} = \frac{\gamma_{I, i'}}{\gamma_{I, i''}} = \frac{w_{i'}}{w_{i''}}$$

$$\frac{\beta_{Y_I, j'}}{\beta_{Y_I, j''}} = \frac{\beta_{Y_I, J}\, \gamma_{J, j'}}{\beta_{Y_I, J}\, \gamma_{J, j''}} = \frac{\gamma_{J, j'}}{\gamma_{J, j''}} = \frac{w_{j'}}{w_{j''}}$$

$$\frac{\beta_{Y_I, k'}}{\beta_{Y_I, k''}} = \frac{\beta_{Y_I, K}\, \gamma_{K, k'}}{\beta_{Y_I, K}\, \gamma_{K, k''}} = \frac{\gamma_{K, k'}}{\gamma_{K, k''}} = \frac{w_{k'}}{w_{k''}}$$

$$(\gamma_{I, i'} = \partial p_I / \partial p_{i'},\ \gamma_{I, i''} = \partial p_I / \partial p_{i''})$$

erfüllt sein muß.

Damit ist grundsätzlich das Allokationsproblem über zwei Stadien gelöst. In Verbindung mit Satz 2 (Abschn. 1) kann man aus der Bedingung

$$(7) \qquad \beta_{Y_I, i'} / \beta_{Y_I, i''} = \beta_{Y_J, i'} / \beta_{Y_J, i''} = \beta_{Y_K, i'} / \beta_{Y_K, i''} = w_{i'} / w_{i''}$$

ersehen, daß eine optimale Allokation der Konsumausgaben auf die Gütergruppen I, J, K dann erfolgt ist, wenn die preisinduzierten Reallokationen in bezug auf diese Gruppen sich proportional zu den entsprechenden Gewichten bewegen. Dabei läßt sich das optimale Allokationssystem am besten als Matrix

$$(14)\qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_{Y_I,\, i_I}}{\beta_{Y_I,\, i_{II}}} & \dfrac{\beta_{Y_J,\, i_I}}{\beta_{Y_J,\, i_{II}}} & \dfrac{\beta_{Y_K,\, i_I}}{\beta_{Y_K,\, i_{II}}} \\ \dfrac{\beta_{Y_I,\, j_I}}{\beta_{Y_I,\, j_{II}}} & \dfrac{\beta_{Y_J,\, j_I}}{\beta_{Y_J,\, j_{II}}} & \dfrac{\beta_{Y_K,\, j_I}}{\beta_{Y_K,\, j_{II}}} \\ \dfrac{\beta_{Y_I,\, k_I}}{\beta_{Y_I,\, k_{II}}} & \dfrac{\beta_{Y_J,\, k_I}}{\beta_{Y_J,\, k_{II}}} & \dfrac{\beta_{Y_K,\, k_I}}{\beta_{Y_K,\, k_{II}}} \end{bmatrix}$$

verdeutlichen.

Diese Matrix hat einige leicht ersichtliche Eigenschaften. So findet man auf der Diagonalen alle direkt preisinduzierten Reallokationen und um sie symmetrisch verteilt alle indirekt preisinduzierten Reallokationen. Jede Zeile dieser Matrix trifft genau auf Satz 2 zu, während jede Spalte auf die hinreichende Bedingung (13) hinweist.

Der soeben beschriebene Budgetierungsprozeß nimmt eine vorläufige Allokation der Gruppenausgaben auf die Güter innerhalb der Gruppe als gegeben an. *Gorman* [5, S. 472] spricht in diesem Zusammenhang von »preliminary allocation«. Ein solcher aus einer separablen Nutzenfunktion ableitbarer Budgetierungsprozeß erzielt dann eine – in zwei Stufen erfolgende – optimale Allokation des Konsumenteneinkommens. Einen entsprechenden Budgetierungsprozeß kann man auch bei homogener Separabilität nachweisen. Hierfür liegen Ansätze und Lösungsmöglichkeiten von *Gorman* [5] und *Green* [6, Kap. 3,4., Kap. 4] vor.

Den Gedanken eines mehrstufigen Budgetierungsprozesses hat man sich in der praktischen Ökonometrie bereits zu eigen gemacht. *Leser* [11] benutzt ihn im Rahmen seines ökonometrischen Modells. *Leser* [12, S. 40, 41] betont: »Die logische Grundlage unserer Methode enthält die Annahme, daß sich die wirtschaftlichen Entscheidungen des Verbrauchers – bewußt oder unbewußt – gewissermaßen in mehreren Stufen vollziehen. Zunächst wird der Konsum fixiert, dann folgt die Verteilung der Ausgaben auf mehrere Gütergruppen, weiterhin findet möglicherweise in allen oder einigen Gruppen die Ausgabenverteilung auf Untergruppen statt und schließlich wird die Verteilung auf individuelle Konsumgüter vorgenommen... Mathematisch wird jede Stufe durch eine Regressionsgleichung mit verschiedenen Variablen charakterisiert.«

Freilich läßt sich für den einzelnen Konsumenten (oder Haushalt) keine so allgemeingültige Antwort geben, wie sie aus dem hier dargestellten Budgetierungsprozeß folgt. Dennoch scheint die Erfahrung zu lehren, daß der Konsument innerhalb seines Gesamtbudgets – wenn auch wohl oft unbewußt – Teilbudgets festlegt, die an seinen Bedarfszielen ausgerichtet sind (*Leontief* [10, S. 371]). Diese Teilbudgets variieren zwar innerhalb eines längeren Zeitraums, doch ist es auf kurze Sicht und bei größeren Gruppen wenig wahrscheinlich, daß die einmal geplanten Gruppenausgaben durch Preisveränderungen in anderen Gruppen *direkt* berührt werden. Wie in diesem Kapitel gezeigt werden konnte, findet ein *indirekter*

Substitutionseffekt zwischen den Gruppen durch eine indirekt preisinduzierte Reallokation der Gruppenausgaben statt. Es liegt nahe, daß solche Reallokationen nur in dem praktisch seltenen Fall auftreten, wo Preisveränderungen bei allen oder bei einer Mehrzahl von Gütern innerhalb einer Gruppe erfolgen. Treten dagegen Preisveränderungen nur bei wenigen Gütern innerhalb der gleichen Gruppe auf, so ist es wahrscheinlich, daß hier nur direkte Substitutionseffekte innerhalb der betreffenden Gruppe zum Zuge kommen, die gleichsam mögliche Reallokationseffekte absorbieren. Eine nähere Begründung für die beiden Fälle läßt sich aus Gleichung (5) (S. 609) entnehmen, wenn man sie in die Form

$$(5^*) \qquad dY_J = \sum_i (\partial Y_J/\partial Y_I)\,(\partial Y_I/\partial p_i)\,dp_i + (\partial Y_J/\partial Y)\,dY \quad (I \neq J)$$

faßt.

Die Hypothese der Unabhängigkeit in der Theorie der funktionalen Separabilität schließt die Existenz von direkten (preisinduzierten) Substitutions- oder Komplementaritätsbeziehungen zwischen den Gruppen aus. Gelingt es nachzuweisen, daß ein nennenswerter Substitutionseffekt zwischen den Gruppen existiert, dann läßt sich diese so wesentliche Hypothese nicht länger vertreten. Der Nachweis scheint jedoch nicht gelungen zu sein. Aus Untersuchungen, die namentlich von *Leser* [11] [12] angestellt worden sind, kann man entnehmen, daß Substitutions- und ebenso Komplementaritätseffekte invers zur Größe der Gruppen variieren. Ergebnisse, die *Pearce* [15, S. 244f.] in ökonometrischen Tests über die Abschätzung der Multikollinearität zwischen Gütergruppen gefunden hat, können hier zur Bestätigung herangezogen werden. So stellt sich heraus, daß die Hypothese der Unabhängigkeit dann um so sinnvoller wird, je größer die Gruppen gewählt werden, daß andererseits die Ausschaltung von Substitutionseffekten dann um so fragwürdiger wird, je kleiner die Gruppen sind. Das ist gleichzeitig ein Hinweis dafür, wieweit man eine Spezifizierung der Gütergruppen treiben sollte. Wo allerdings hier eine klare Grenze zu ziehen ist, muß durch weiterführende empirische Untersuchungen ermittelt werden. Bisher liegen noch keine abschließenden Ergebnisse vor.

Den möglichen Einwand, daß es nicht genüge, den Budgetierungsprozeß nur auf Preise und Einkommen als Entscheidungsdeterminanten zu stützen, kann man teilweise entkräften. Untersuchungen von *Gabor* und *Granger* [3] zeigen, daß ein überwiegender Teil (82 %) der Konsumenten (Hausfrauen) sich über die Preise einiger ausgewählter, laufend gekaufter Waren im klaren sind. Ihre Ergebnisse bestätigen die vorherrschende Rolle der Preise und des Einkommens im Budgetierungsprozeß des Konsumenten. Dabei soll der mitunter beträchtliche Einfluß der sozioökonomischen Variablen (namentlich bei dauerhaften Gütern) nicht geleugnet werden, doch kann in einer allgemeinen Theorie des Konsumentenverhaltens die alleinige Berücksichtigung von Preisen und Einkommen zu einer ersten, angenäherten Lösung des mikroökonomischen Entscheidungsproblems führen.

IV. Funktionale Separabilität und Konsumtechnologie

Kapitel IV befaßt sich mit einigen recht naheliegenden Gemeinsamkeiten zwischen Produktions- und Nutzentheorie.

Der erste Abschnitt gibt einen ausgewählten Überblick über die verschiedenen bisher in der Literatur verwendeten Verfahren, die darauf hinauslaufen, die Nutzentheorie durch Einführung produktionstheoretischer Beziehungen (Mittel-Zweck-Relationen) mit der Produktionstheorie organisch zu verbinden. Es wird auch deutlich werden, daß nur unter der Voraussetzung, daß eine reelle Nutzenfunktion existiert, eine Verbindung zwischen Produktions- und Nutzentheorie geschaffen werden kann.

Der zweite Abschnitt diskutiert dann zwei linearökonomische Arbeiten von *Morishima* [13] und *Lancaster* [9], die von der Lösungstechnik her einige neue Einsichten in die Theorie des Konsumentenverhaltens gestatten. Diese Modelle weisen offensichtlich Gemeinsamkeiten mit dem *verallgemeinerten Leontief*-Modell auf, wie es etwa bei *Gale* [4, Kap. 9] beschrieben worden ist. Die Frage, inwieweit solche Verfahren nicht nur methodisch (d.h. lösungstechnisch), sondern auch der inhaltlichen Aussage nach von der Theorie der funktionalen Separabilität abweichen, ist Gegenstand einer kritischen Betrachtung im dritten Abschnitt. Wir werden dort argumentieren, daß die Theorie der funktionalen Separabilität unter bestimmten Bedingungen eine vergleichbare Erklärung für mikroökonomische Sachverhalte bieten kann.

1. Produktionstheoretische Beziehungen in der Nutzentheorie

In der wirtschaftstheoretischen Literatur ist vielfach auf die gemeinsamen Grundlagen von Produktions- und Nutzentheorie hingewiesen worden. *Wold* [19, S. 148, Prob. 60] hat die an sich naheliegende Symmetrievorstellung präzise so gefaßt, daß er von einem Isomorphismus zwischen Produktionstheorie und vorparetianischer Konsumtheorie spricht. Das Adjektiv »vorparetianisch« ist wesentlich, weil hier die Meßbarkeitsfrage im kardinalen Sinn beantwortet ist.

Man kann auch zu einer ähnlichen Symmetrievorstellung gelangen, wenn man Produzenten- und Konsumentenentscheidung aufgrund eines allgemeinen Entscheidungsmodells analysiert und die Äquivalenz der Axiome für beide Entscheidungsträger (Produzenten und Konsumenten) in diesem Modell nachweist (*Kade* [7, Kap. B, D, E, F]).

Die offensichtliche Verwandtschaft zwischen Nutzen- und Produktionstheorie läßt den Gedanken entstehen, die Nutzenfunktion (ähnlich einer Produktionsfunktion) durch eine Mittel-Zweck-Beziehung oder zeitgemäßer durch ein Input-Output-Verhältnis zu charakterisieren. Ein solcher Gedanke taucht schon bei *Hicks* [6a, S. 166–167] auf, doch hat dieser den Gedanken nicht intensiv verfolgt, weil er glaubt, daß mit der Einführung technischer Beziehungen zwischen Bedarfsmitteln und Bedarfszielen analytisch nicht viel gewonnen sei, daß sich solche Beziehungen eher als nützliches Korrektiv zur traditionellen Nutzen- und Nachfrage-

theorie eignen. Ähnliche Gedanken wie diejenigen von *Hicks*, allerdings mit einer weit weniger kritischen Einstellung gegenüber ihrer Verwendbarkeit, sind in jüngster Zeit von *Furubotn* [2] und *Muth* [14] vertreten worden. Die gemeinsame Grundlage der beiden zuletzt genannten Arbeiten bildet (im weiteren Sinn) die Theorie der funktionalen Separabilität. Das Verfahren von *Furubotn* ist insofern allgemeiner Natur, als jede spezifische Funktion als Produktionsfunktion verstanden wird und keine Annahmen über die Form dieser Funktion getroffen werden. In diesem Verfahren bildet die Grenzproduktivität der Güter (Inputs) ein wesentliches Element im Entscheidungsprozeß des Konsumenten. *Muth* geht von sehr ähnlichen Überlegungen aus, setzt aber spezielle Eigenschaften der Produktionsfunktion (z. B. Homogenität) voraus, die sich empirisch nur unter bestimmten Vorbehalten rechtfertigen lassen. Beide Arbeiten können auch als ein systematischer Versuch gewertet werden, eine Verschmelzung von *Strotz'* »Nutzenbaum« [17] und *Leontiefs* »Interner Struktur« [10] herbeizuführen.

Den Vorteil der Verschmelzung dieser beiden Begriffe kann man an einem Beispiel sehen, das zeigt, wie die Theorie der Unternehmensentscheidung in ein allgemeines Entscheidungsmodell eingeordnet werden kann: Eine Unternehmung möge sich in beliebig viele Produktions- und Absatzabteilungen gliedern. Die Produktionsstruktur lasse sich durch eine separable Produktionsfunktion (»Interne Struktur«), die Absatzstruktur durch eine separable Nutzenfunktion (»Nutzenbaum«) beschreiben. Den Abteilungen seien entsprechend spezifische Produktions- oder Nutzenfunktionen zugeordnet. Eine Vereinigung beider Strukturen in eine einheitliche Entscheidungsstruktur (der Unternehmung) bewirkt eine Interdependenz dieser Strukturen. (Diese Entscheidungsstruktur läßt sich graphisch durch ein vertikales Strukturdiagramm darstellen.) So wirkt eine Lagrangesche Maximierung der Nutzenfunktion auf eine Optimierung der Inputstruktur hin. Ein ähnliches Beispiel läßt sich auch bezüglich der Entscheidungsstruktur in Haushalten bilden.

Obwohl diese Arbeiten auf eine Verschmelzung von Produktions- und Nutzentheorie innerhalb einer allgemeinen Entscheidungstheorie abzielen, bieten sie aus der Sicht einer Theorie der funktionalen Separabilität methodisch keine neuen Ansatzpunkte. Ein anderer, hier zu beachtender Weg führt von *Hicks* direkt zu den Arbeiten von *Morishima* [13] und *Lancaster* [9]. Damit ist eine methodische Neubesinnung verbunden, gleichzeitig eine Kritik an der traditionellen Theorie, ebenso das Streben nach größerer Verallgemeinerung und der Wunsch, zu empirisch verwertbaren Resultaten in der Mikrotheorie zu gelangen. Dieser »konsumtechnologische« Weg in der modernen Nutzentheorie erhält verständlicherweise Auftrieb durch eine laufende Erweiterung und Vertiefung der Anwendungsmöglichkeiten linearökonomischer Ansätze in der Wirtschaftstheorie. Die Anwendung solcher Techniken ist in der Produktionstheorie bereits sehr weit gediehen und hat dort schon einen beachtlichen Reifegrad erreicht. Freilich darf nicht übersehen werden, daß die Probleme in der Nutzentheorie komplizierter liegen als in der Produktionstheorie, wo sich technologische Optimierungsprobleme oft befriedigend durch eine

numerisch bestimmte Zielfunktion und eine zugeordnete Beschränkungsmenge (z.B. als Menge der Aktivitäten) beschreiben lassen. Man hat es dann mit einer *objektiven* (numerischen) Maximierung oder Minimierung zu tun (*Aumann* [1, S. 217f.]). In der Produktionstheorie ist es oft vernünftig und empirisch vertretbar, die Zielfunktion als lineare Form und die Beschränkungsmenge als konvexes Polyeder aufzufassen (*Gale* [4, Kap. 2 und 3]). Bezüglich der numerischen Behandlung bietet das Optimierungsproblem keine ernsthaften Schwierigkeiten, da in der linearen Optimierung genügend Algorithmen verfügbar sind. Lineare Optimierungstechniken lassen sich jedoch nicht ohne weiteres auf die Nutzentheorie übertragen, wo vage Begriffe wie Bewertung, Gefühl, Wahrnehmung usw. eine vorherrschende Rolle spielen. Zusätzliche Voraussetzungen sind notwendig. Entscheidend ist, daß die Existenz einer reellen Nutzenfunktion gesichert sein muß. Diese Nutzenfunktion muß die zugrunde liegende Präferenzordnung darstellen. Dann läßt sich grundsätzlich ein *subjektives* (nicht numerisches) Optimierungsproblem auf ein *objektives* (numerisches), gleichgeartetes Problem reduzieren, mit dem Erfolg, daß hierfür irgendein Algorithmus der linearen oder nichtlinearen Optimierung zur Verfügung steht.

(Da jede additive Funktion linear ist, kann *Aumann* [1, S. 226] zeigen, daß sich das entsprechende Optimierungsproblem in ein *ganzzahliges* lineares Optimierungsproblem umwandeln läßt, wofür es genügend Standardalgorithmen gibt.)

2. Die linearökonomischen (aktivitätsanalytischen) Ansätze von Morishima und Lancaster

Wir wenden uns zunächst der Arbeit von *Morishima* [13] zu.

Der Grundgedanke dieser Arbeit ist, die in den Begehrkreis des Konsumenten fallenden Güter so in Gruppen zusammenzufassen, daß die in einer Gruppe enthaltenen Güter gemeinsam einem »Bedarfsziel« (»objective«) funktional zugeordnet werden können. Es möge dann für n Güter m Bedarfsziele geben. Wie sich noch herausstellen wird, ist der Begriff des Bedarfszieles bei *Morishima* und ebenso bei *Lancaster* formal anders gefaßt als in Kapitel II. *Morishima* führt nun den von *Hicks* [6a] übernommenen Gedanken ein, daß das Verhältnis von Gütern (Bedarfsmitteln) zu Bedarfszielen als technisch im Sinne einer Produktionsfunktion zu erklären sei. Die Bedarfsintensitätsfunktion nimmt für $j, r = 1, \ldots, m$; $j \neq r$; $p = \alpha, \beta, \ldots, \mu$, die Form $y_j = h_j(x_{r_1}, \ldots, x_{rp})$ an, eine Funktion, die homogen vom Grade 1 sein soll. Nach entsprechender Normierung der Variablen dieser Funktion $z_{ri} = x_{ri}/y_j$ $(i = 1, \ldots, p)$ (z_{ri} kann analog den technischen Koeffizienten in einer *Leontief*schen Produktionsfunktion als Bedarfsintensitätskoeffizient verstanden werden) findet man $1 = h_j(z_{r_1}, \ldots, z_{rp})$ $(p = \alpha, \beta, \ldots, \mu)$.

In dem Fall, wo $n = m$ ist, wo also die Zahl der Bedarfsziele gleich der der Mittel zur Erreichung dieser Ziele ist, läuft dieser Ansatz auf die traditionelle Theorie hinaus.

Der Zusammenhang zwischen der auf dem Mittel-Ziel-Verhältnis be-

gründeten Theorie *Morishimas* und einer entsprechenden Produktionstheorie kann jetzt näher verdeutlicht werden. Das Problem bestehe darin: Man maximiere die Nutzenfunktion $u = u(y_1, \ldots, y_m)$ unter der Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{m} q_j y_j = Y$, wobei $q_j = \sum_{i=1}^{p} z_{ri} p_{ri}$ die Durchschnittskosten des j-ten Bedarfsmittels bezeichnet. (Im Fall $n = m$ ist dieses Problem mit dem traditionellen Nutzenmaximierungsproblem Max $\{u = u(x_1, \ldots, x_n): \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = Y\}$äquivalent.) Dann gewinnen wir daraus die Gleichgewichtsbedingung $u_j = \lambda q_j$ (λ ist der Lagrange-Multiplikator).

(Eine solche Nutzenfunktion kann aber auch als Profitfunktion der Unternehmung verstanden werden, die es zu maximieren gilt. Verständlich ist dann die Schreibweise Max $\{u = \sum_j r_j y_j : \sum_j q_j y_j = Y\}$, wobei r_j gleich dem Stückgewinn der j-ten Produktionsmenge y_j ist und Y hier als Kapitalbeschränkung der Unternehmung zu verstehen ist.) Nun impliziert die Homogenität der Bedarfsintensitätsfunktion konstante Ertragszuwächse. Aufgrund der in einem solchen Fall immer erfüllten Stabilitätsbedingung weist *Morishima* [13, S. 194] nach, daß Min $\{q_j = \sum_i p_{ri} z_{ri} : 1 = h_j(z_{r_1}, \ldots, z_{rp})$ (technische Restriktion)$\}$ dem vorgenannten Maximierungsproblem entspricht.

Wir sind jetzt in der Lage, in groben Zügen zu skizzieren, wie sich ein Konsument in *Morishimas* Modell verhalten sollte, wenn er eine Optimierung seiner Konsumaussichten anstrebt. Es ist klar, daß es für diesen Konsumenten darauf ankommt, aus dem Bereich der zulässigen Konsumaussichten die optimale zu wählen. Bei den gegebenen Voraussetzungen reduziert sich so sein Entscheidungs- und Allokationsproblem auf das lineare Optimierungsproblem Max $\{u = u(y_1, \ldots, y_m): \sum_j q_j y_j = Y, y_j \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m\}$. Dieses Maximierungsproblem kennzeichnet auch hinreichend das Beschränkungssystem, unter dem eine Verteilung der Bedarfsziele auf optimale Weise erfolgen kann. Da die Bedarfsintensitätskoeffizienten gegeben und die y_j durch die Optimierung gelöst sind, gewinnt *Morishima* die unbekannten x_{ri} ($r = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, p$) aus dem linearen Gleichungssystem [13, S. 199]:

$$
\begin{aligned}
x_{r1} &= z_{r1} y^1{}_j + z_{r1} y^2{}_j + \ldots + z_{r1} y^J{}_j \\
x_{r2} &= z_{r2} y^1{}_j + z_{r2} y^2{}_j + \ldots + z_{r2} y^J{}_j \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_{rp} &= z_{rp} y^1{}_j + z_{rp} y^2{}_j + \ldots + z_{rp} y^J{}_j .
\end{aligned}
$$

Hierbei gilt die Gleichsetzung $y^1{}_j + y^2{}_j + \ldots + y^J{}_j = y_j$. Das heißt, es müssen nach Voraussetzung J-verschiedene Methoden existieren, um y_j zu verwirklichen, so daß zum Beispiel $y^h{}_j$ ($h = 1, \ldots, J$) die Einheit des Bedarfszieles j angibt, die durch die h-te Methode verwirklicht wird. Wie sich herausstellt, hängt es von den Preisen der Bedarfsmittel ab, welche Methode gewählt wird. Unter den verfügbaren Methoden wird

der Konsument jene wählen, die das Bedarfsziel mit dem geringsten finanziellen Aufwand an Bedarfsmitteln verwirklicht. Eine solche Wahl heißt auch *effizient*. Dieses Ergebnis läßt sich in *Morishimas* Modell aus der nachgewiesenen Äquivalenz des obenerwähnten Maximierungsproblems mit dem zugeordneten Minimierungsproblem erschließen, so daß hier jede Optimierung der Konsumaussichten gleichwertig ist mit ihrer effizienten Wahl.

Lancaster [9] knüpft nun an Gedanken und Ergebnisse *Morishimas* an und verallgemeinert sie. Im voraus kann bereits gesagt werden, daß *Lancasters* Verfahren eine umfassende, in sich geschlossene Theorie des Konsumentenverhaltens entwickelt, die wohl in der gesamten Dogmengeschichte dieser Theorie keinen Vergleich findet. Wir können auch hier nur das für einen Vergleich mit unserer Arbeit Wesentliche herausgreifen. Eine Umdeutung von *Lancasters* Terminologie erleichtert die Verbindung seiner Arbeit mit der *Morishimas*. Statt von Bedarfszielen spricht *Lancaster* allgemein von Charakteristiken. Nur diese sollen für den Entscheidungsprozeß des Konsumenten relevant sein in dem Sinne, daß er – gemäß seiner Präferenz – auf der Menge der Charakteristiken zu entscheiden hat. Zunächst beschränken wir die Betrachtung auf die einfache Beziehung zwischen Charakteristiken und Gütern. Für *Lancaster* ist die Beobachtung wichtig, daß ein Gut (für sich) mehrere Charakteristiken haben kann (z.B. kann Benzin als Reinigungsmittel und als Kraftstoff verwendet werden), doch schließt sein Verfahren auch den (von *Morishima* gegebenen) Fall ein, daß mehrere Güter (Bedarfsmittel) gemeinsam einem Bedarfsziel (einer Charakteristik) zugeordnet werden können. Von der Konsumtechnologie des Konsumenten oder der Konsumgesellschaft hängt es ab, welche Zuordnungsmöglichkeiten zwischen Charakteristiken und Gütern gegeben sind. Tatsächlich ist in einer komplexen Konsumgesellschaft der Fall realistisch, wo die Zahl der Güter n die Zahl der Charakteristiken m übersteigt. (Andererseits ist in einer primitiven Konsumgesellschaft, die sich durch eine einfache Konsumtechnologie ausweist, genau der gegenteilige Fall zutreffend. Hier übersteigt die Zahl der Charakteristiken diejenige der vorhandenen Güter. Auf diesen Fall werden wir nicht näher eingehen.)

Als dritten Fall vermerken wir – wie schon bei *Morishima* –, daß eine eineindeutige Zuordnung von Gütern zu Charakteristiken inhaltlich auf die traditionelle Theorie hinausläuft.

Um jetzt die Beziehung zwischen Charakteristiken, Gütern und Konsumaktivitäten als nächsten Schritt zu betrachten, dringen wir tiefer in die aktivitätsanalytische Darstellung *Lancasters* ein und setzen voraus – wie in der Aktivitätsanalyse üblich [4, Kap. 9] –, daß eine lineare Beziehung (1) $x_r = \sum_k a_{rk} w_k$ gegeben ist, wobei k (ein Skalar) das Intensitätsniveau der Konsumaktivität w (das ist bei *Lancaster* ein einzelnes Gut oder eine Kollektion von Gütern) bezeichnet, auf dem x_r konsumiert wird, und wobei a_{rk} ein fester Koeffizient ist, der von der gesellschaftlich bestimmten Konsumtechnologie abhängt.

(In allgemeiner Fassung ist für den Ausdruck (1) die Matrixschreibweise $x = Aw$, mit x, w als Vektoren und A als Matrix, vorzuziehen.)

Als zweite Annahme konstruiert *Lancaster* eine Beziehung zwischen der j-ten Charakteristik und der k-ten Konsumaktivität. Auch diese Beziehung ist linear:

(2) $$y_j = \sum_k b_{jk} w_k \text{ (in Matrixschreibweise } y = Bw).$$

Es gibt also keine direkte Beziehung zwischen Gütern und Charakteristiken, sondern die Beziehung ist indirekter Art und führt über die Existenz einer Konsumaktivität. Daran erkennt man bereits, welche Fülle von Kombinationsmöglichkeiten hier entstehen kann. Unter einer bestimmten Bedingung jedoch, wenn eine eineindeutige Zuordnung von Gütern, Konsumaktivitäten und Charakteristiken gegeben ist, läßt sich die lineare Beziehung $y_j = \sum_r c_{jr} x_r$ ($j = 1, \ldots, m$, $r = 1, \ldots, n$; $m = n$) ableiten. In diesem Fall kann (trivialerweise) die traditionelle Nutzenfunktion $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ in die Form $u = g\left(\sum_r c_{1r} x_r, \sum_r c_{2r} x_r, \ldots, \sum_r c_{mr} x_r\right)$ transformiert werden, d. h. in Matrixschreibweise $u = f(x) = g(Cx) = g(y)$.

(Andere, nichttriviale Transformationen sind hier möglich, wenn die spezielle Bedingung der eineindeutigen Zuordnung fallengelassen wird.)

Jedem Gut entspricht dann eine und nur eine Charakteristik.

Eine Budgetrestriktion besteht in der Form

(3) $$p_r x_r \leq Y \text{ (oder } px \leq Y).$$

Wenn (1), (2) und (3) als Nebenbedingungen festgelegt sind, bleibt nur noch übrig, das Maximierungsproblem als Ganzes zu betrachten.

Die Nutzenfunktion $u(y)$ ist konkav. Sie ist definiert auf dem m-dimensionalen Raum der Charakteristiken R^m. Wegen der umkehrbaren Beziehung zwischen konvexen und konkaven Funktionen (*Eggleston* [1a, Kap. 3]) kann man das Optimierungsproblem so formulieren:

(4) $$\text{Max } \{u(y): x = Aw,\ y = Bw,\ px \leq Y,\ x, y, w \geq 0\}.$$

Damit ist ein nichtlineares (konvexes) Optimierungsproblem mit linearen Restriktionen gegeben, für das verschiedene Lösungsverfahren verfügbar sind. Es ist nun bemerkenswert, daß über einen Satz von *Kuhn* und *Tucker* – einen Kernsatz der nichtlinearen Optimierung (*Künzi* und *Krelle* [8, Kap. 3]) – eine Verallgemeinerung der klassischen Multiplikatormethode von *Lagrange* ermöglicht wird, und zwar in den Fällen, wo die Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen (und nicht nur in Form von Gleichungen) existieren. Dieser mathematisch nachweisbare Umstand führt hier zu einer einfachen Konsequenz: Stimmt in *Lancasters* Modell die Zahl der Charakteristiken, Güter und Konsumaktivitäten überein, so reduziert sich das konvexe Optimierungsproblem auf das der *Lagrange*schen Maximierung.

Einige Transformationseigenschaften des eben formulierten konvexen Optimierungsproblems erklären die algebraische (und geometrische) Struktur dieses Modells [9, S. 137]. Diese lassen sich kurz so wiedergeben:

1. (a) Eine konvexe Menge (als konvexes Polyeder darstellbar) $X \subseteq R^n$ ist linear abbildbar in eine konvexe Menge $T \subseteq R^m$, wenn es für jeden Gütervektor $x \in X$ ein Bild $f(x) = y \in T$ gibt.

(b) Eine konvexe Menge $T \subseteq R^m$ ist linear abbildbar in eine konvexe Menge $X \subseteq R^n$, wenn es für jeden Vektor der Charakteristiken $y \in T$ ein Bild $g(y) = x \in X$ gibt.

2. Eine eineindeutige Abbildung (oder ein Isomorphismus) von T auf X (bzw. von X auf T) existiert dann nicht, wenn T und X nicht dimensionsgleich (d.h. nicht isomorph) sind. Das ist dann der Fall, wenn in *Lancasters* Modell die Zahl der Charakteristiken diejenige der Güter (bzw. die Zahl der Güter diejenige der Charakteristiken) übersteigt.

3. Eine eineindeutige Abbildung von T auf X (bzw. von X auf T) existiert nur dann, wenn T und X dimensionsgleich sind. Denn nur in diesem Fall gibt es für $x \neq x'$ und $x, x' \in X$ ($y \neq y'$ und $y, y' \in T$) Urbilder $g^{-1}(x) \neq g^{-1}(x')$ und $g^{-1}(x), g^{-1}(x') \in T$ ($f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y')$ und $f^{-1}(y), f^{-1}(y') \in X$). Das bedeutet wiederum, daß nur in diesem Fall die Zahl der Charakteristiken gleich derjenigen der Güter ist.

Nur wenn die dritte Eigenschaft vorliegt, läßt sich, wie bereits angedeutet, das konvexe Optimierungsproblem in ein Problem der *Lagrange*schen Maximierung überführen. Jede optimale Lösung des einen Problems impliziert eine gleichwertige optimale Lösung des anderen.

In einem anderen wichtigen Fall, wo eine eineindeutige Zuordnung von Gütern zu Konsumaktivitäten gegeben ist und wo die Zahl der Güter (bzw. der Aktivitäten) diejenige der Charakteristiken übersteigt, zeigt *Lancaster* [9, S. 139], daß sich die optimale Wahl des Konsumenten aus der Lösung des *kanonischen* linearen Optimierungsproblems (*Gale* [4, S. 75]) Min $\{px\colon Bx = y^0, x \geq 0\}$ für einen bestimmten Vektor der Charakteristiken y^0 ergibt. Geometrisch kann diese Wahl auf einem polyedrisch geformten Transformationsgebilde erklärt werden [9, S. 139], auf dessen Transformationshyperfläche alle konsumeffizienten Punkte liegen. Die Wahlhandlung des Konsumenten vollzieht sich dann gleichsam stufenweise in einer objektiven (»efficiency choice«) und subjektiven (»private choice«) Form. Bei der objektiven (oder effizienten) Wahl ist der Konsument gebunden an das Transformationsgebilde der Charakteristiken und alle konsumeffizienten Punkte auf der Hyperfläche. (Eine damit verwandte Vorstellung einer objektiv bestimmten Wahl im Sinne einer größtmöglichen Effizienz finden wir bereits bei *Morishima* vor.) Bei der subjektiven Wahl bestimmt er unter allen konsumeffizienten Punkten den seiner Präferenz entsprechenden Punkt. Beide Wahlmöglichkeiten sind voneinander unabhängig und analytisch streng zu unterscheiden.

3. Eine vergleichende Würdigung

Jetzt ist es möglich, die hier entwickelte Theorie der funktionalen Separabilität im Lichte der aktivitätsanalytischen Arbeiten von *Morishima* und *Lancaster* kurz zu betrachten. Gehen wir nur von dem *Lancaster*schen Modell aus, so bemerken wir sofort – es ist bereits erwähnt worden –, daß wir aus der umfassenden Vielfalt der Aussagemöglichkeiten,

die durch dieses Modell gegeben sind, nur einige Eigenschaften herausgreifen können, die einen Vergleich mit der Theorie der funktionalen Separabilität erlauben. Welche gemeinsamen Bedingungen müssen erfüllt sein, damit ein Vergleich der verschiedenen Verfahren möglich wird?

(a) Die Zahl der Bedarfsmittel (Güter) übersteigt diejenige der Bedarfsziele (Charakteristiken).

(Voraussetzung einer komplexen Konsumgesellschaft mit einer komplizierten Konsumstruktur und -technologie. Jeder Konsument findet diese Konsumtechnologie vor, unabhängig von seinem Einkommen.)

(b) Es besteht eine eineindeutige Zuordnung von Gütern zu Konsumaktivitäten. (Diese Bedingung bezieht sich auf *Lancasters* Modell.)

(c) Verschiedene Güter (in einer Gütergruppe) dienen nur einem Bedarfsziel.

Hier wollen wir nicht auf die mathematischen Unterschiede eingehen, die sich aus einem Vergleich der genannten Verfahren mit der Theorie der funktionalen Separabilität ergeben. Statt dessen wollen wir auf die verwandte Struktur der Nutzenfunktion hinweisen. Bedingung (c) ist für den folgenden Umstand bedeutsam: Betrachten wir die Nutzenfunktion $f(x) = g(h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x))$, so sind in *Lancasters* Modell – wenn (c) nicht berücksichtigt wird – die Funktionen h_i $(i = 1, \ldots, n)$ aufgrund der angegebenen Transformationseigenschaften Linearformen in allen Argumenten x. Dagegen sind in der Theorie der funktionalen Separabilität die spezifischen Funktionen auf den Argumentenbereich der Teilmengen von X beschränkt. Das Gleiche gilt in dieser Hinsicht für die Bedarfsintensitätsfunktion *Morishimas*.

Erinnern wir an die Ausführungen in Kapitel II, so fällt auf, daß dort die Beziehung zwischen Bedarfszielen und Gütern so konstruiert ist, daß sich die Existenz von spezifischen Nutzenfunktionen nachweisen läßt. Bei *Morishima* und *Lancaster* hingegen ist die Beziehung zwischen ihren Bedarfszielen und den Gütern aktivitätsanalytisch bestimmt – bei *Morishima* als Bedarfsintensitätsfunktion, bei *Lancaster* als Linearform $y = Bx$. So ist diese Beziehung bei beiden *objektiv* (technisch) bestimmt, während sie im Rahmen einer Theorie der funktionalen Separabilität *subjektiv* gefaßt ist, d.h. sie beruht auf der individuellen Präferenzentscheidung. Diese Gegenüberstellung erklärt sich aus der unterschiedlichen Methodik. Versucht man nun nicht von der Methodik, sondern von der Struktur einer auf diese Modelle zugeschnittenen Nutzenfunktion auszugehen, so scheint es, daß die Theorie der funktionalen Separabilität unter den Bedingungen (a), (b), (c) vergleichbare mikroökonomische Sachverhalte zu erklären vermag wie die genannten konsumtechnologischen Verfahren.

Gehen andererseits diese Verfahren – und hiermit ist namentlich das von *Lancaster* gemeint – von so allgemeinen Voraussetzungen aus (die durch die Begriffsweite der Linearökonomik möglich sind), daß ihnen eine mit traditionellem Gedankengut verbundene, ausgefeilte Theorie der funktionalen Separabilität nichts Vergleichbares entgegenzusetzen vermag, so weisen sie nicht nur methodisch neue Wege, sondern bieten auch

inhaltlich neue Aussagen. Als Beispiel läßt sich aus *Lancasters* Modell der Fall entnehmen, wo die Zuordnung von Gütern zu Konsumaktivitäten nicht eineindeutig ist.

Zum Abschluß wollen wir noch kurz auf eine – aus unserer Sicht – wesentliche Beschränkung der genannten konsumtechnologischen Ansätze hinweisen. Es ist bereits erwähnt worden, daß die Erlangung einer optimalen Konsumentenentscheidung in der *Morishima-Lancaster*schen Modellklasse sich rein technisch auf das Auffinden einer größtmöglichen Effizienz zwischen Bedarfsmitteln (Gütern) und zugeordneten Bedarfszielen (Charakteristiken) beschränkt. Dieser Umstand wird deutlich durch die beschriebenen Minimierungsprobleme zum Ausdruck gebracht. Wenn auch vom logischen Standpunkt nichts daran auszusetzen ist, so scheint doch hier die Gefahr nahezuliegen, daß die Analogie zur Produktionstheorie zu weit getrieben wird. Das gilt besonders für *Lancasters* Modell. So erheben sich Bedenken dagegen, eine Theorie des Konsumentenverhaltens (besonders für den Fall einer komplexen Konsumgesellschaft) auf die grundlegende Voraussetzung zu stützen, daß die Konsumtechnologie in Form der *B*-Matrix objektiv (wie eine Produktionstechnologie) bestimmt ist und daß sie für alle Konsumenten, die sich der gleichen Budgetbeschränkung gegenübersehen, gleichermaßen gilt [9, S. 140].

Demgegenüber bietet die Theorie der funktionalen Separabilität eine Optimierung der Konsumentenentscheidung in dem Sinn, daß der Konsument nach freier Präferenzentscheidung eine Bestimmung seiner Bedarfsziele und der zugeordneten Güter vorsieht und eine optimale Allokation seines Budgets anstrebt (Kap. III). Es scheint, daß dieses Verfahren unter den Bedingungen der Nichtrationierung und Konsumentensouveränität empirisch eher gerechtfertigt werden kann.

Summary

This paper carries forward results which have been obtained in the first part (Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 125 (3), July 1969). It stresses the applicability of functional separability to micro-demand theory. Some well-known theorems on micro-allocation are derived. There is also a review on linear consumption models for the purpose to compare the structure and empirical implication of functional separability with these models. It is argued that under three essential assumptions functional separability is able to explain microeconomic behaviour at least as satisfactorily as linear consumption models do.

Literatur

[1] *R. J. Aumann,* Subjective Programming, Kap. 12, in: Human Judgements and Optimality (*M. W. Shelly, G. L. Bryan*, Hrsg.), New York 1964.

[1a] *H. G. Eggleston,* Convexity, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Cambridge 1958.

[2] *E. G. Furubotn,* On some Applications of the Utility Tree, Southern Economic Journal 30, 1963/64.

[3] *A. Gabor* and *C. W. J. Granger,* On the Price Consciousness of Consumers, Applied Statistics 10, 1961.

[4] *D. Gale,* The Theory of Linear Economic Models, New York 1960.

[5] *W. M. Gorman,* Separable Utility and Aggregation, Econometrica 27, 1959.

[6] *H. A. J. Green,* Aggregation in Economic Analysis, Princeton 1964.

[6a] *J. R. Hicks,* Revision of Demand Theory, Oxford 1956.

[7] *G. Kade,* Die Grundannahmen der Preistheorie, Berlin 1962.

[8] *H. P. Künzi* und *W. Krelle,* Nichtlineare Programmierung, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

[9] *K. Lancaster,* A New Approach to Consumer Theory, Journal of Political Economy 74, 1966.

[10] *W. W. Leontief,* Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships, Econometrica 15, 1947.

[11] *C. E. V. Leser,* Commodity Group Expenditure Functions for the United Kingdom 1948–1957.

[12] *C. E. V. Leser,* Die Konstruktion eines Systems von Konsumfunktionen mit Hilfe von Annahmen über die Substitutionselastizitäten, Ifo-Studien 5, 1959.

[13] *M. Morishima,* The Problem of Intrinsic Complementarity and Separability of Goods, Metroeconomica 11, 1959.

[14] *R. F. Muth,* Household Production and Consumer Demand Functions, Econometrica 34, 1966.

[15] *J. F. Pearce,* A Contribution to Demand Analysis, Oxford 1964.

[16] *M. Sono,* The Effect of Price Changes on the Demand and Supply of Separable Goods, International Economic Review 2, 1961.

[17] *R. H. Strotz,* The Empirical Implications of a Utility Tree, Econometrica 25, 1957.

[18] *R. H. Strotz,* The Utility Tree: a Correction and further Appraisal, Econometrica 27, 1959.

[19] *H. Wold* (in Verbindung mit *L. Jureen*), Demand Analysis, A Study in Econometrics, New York 1953.

L e b e n s l a u f

Geboren am 23. November 1942 als Sohn des Volksschullehrers Max Gottinger und seiner Ehefrau Irmgard.
Vier Jahre Grundschule in Waldkirchen/Ndby. und West-Berlin.
Neun Jahre Gymnasium in Hannoversch Münden.
Ab Sommersemester 1962 Beginn des Studiums der Volkswirtschaft und Mathematik an der Universität Göttingen.
Ab Wintersemester 1963/64 Fortsetzung des Studiums der Volkswirtschaft an der Universität München. Im Sommer 1966 Diplom in Volkswirtschaft.
Ab Herbst 1966 Teilnehmer am Aufbaustudium Osteuropa-Wirtschaft an der Universität München.
Danach Abschluß mit Diplom über Oststudien. Forschungsaufenthalt an der Niederländischen Hochschule für Ökonomie (Rotterdam).
Ab Oktober 1968 wissenschaftlicher Referent am Osteuropa-Institut München.